QO‘SHIMCHA INTEGRAL SHARTLI KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN TESKARI MASALALAR

E.I.Xayriyev[1], S.A.G‘afforov[2]

1. Samarqand davlat pedagogika instituti Informatika kafedrasi dotsenti (PhD)
2. Osiyo xalqaro universiteti Ijtimoiy fanlar va texnika fakulteti matematika yo‘nalishi 1-kurs magistranti

Mas'ul muallif: Xayriyev Elyor Ibragimovich, Samarqand davlat pedagogika instituti Informatika kafedrasi dotsenti (PhD).

e-mail: elyorboburjon22@gmail.com

Received: 12 Noyabr 2026
Accepted: 17 Noyabr 2026
Published: 22 Noyabr 2026

Copyright: © 2026 by the author(s). Licensee Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi.

Iqtibos uchun: Xayriyev, E. I. QO‘SHIMCHA INTEGRAL SHARTLI KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN TESKARI MASALALAR / E. I. Xayriyev, S. A. G‘afforov // Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi. — 2026. — T. 11, № 2. — B. 193–196.

Annotatsiya. Maqolada vaqt bo‘yicha Gerasimov–Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosilali subdiffuziya tenglamasi uchun o‘ng tomonning vaqtga bog‘liq noma’lum ko‘paytuvchisini aniqlash bo‘yicha teskari masala qo‘shimcha integral shart (o‘lchash) asosida o‘rganiladi. Fur’e usuli yordamida to‘g‘ri masala yechimi Mittag-Leffler funksiyalari orqali ifodalanadi, teskari masala esa kuchsiz maxsuslikka ega yadroli ikkinchi tur Volterra integral tenglamasiga keltiriladi. Umumlashgan Gronuoll tengsizligi va ketma-ket yaqinlashishlar usulidan foydalanib, teskari masala yechimining mavjudligi, yagonaligi va berilganlarga uzluksiz bog‘liqligi isbotlanadi. Aniq yechimga ega model misol keltirilib, kasr tartib α ning noma’lum funksiyaga ta’siri tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: kasr tartibli hosila, Gerasimov–Kaputo hosilasi, subdiffuziya tenglamasi, teskari masala, integral qo‘shimcha shart, Mittag-Leffler funksiyasi, Volterra integral tenglamasi, Fur’e usuli.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. В статье исследуется обратная задача определения зависящего от времени коэффициента в члене источника уравнения субдиффузии с дробной производной по времени Герasimова–Капуто при дополнительном интегральном условии переопределения. С использованием метода Фурье решение прямой задачи представляется через функции Миттаг–Леффлера, а обратная задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода со слабо сингулярным ядром. Доказываются существование, единственность и устойчивость решения. Приводится модельный пример с явным решением.

Ключевые слова: дробная производная, производная Капуто, уравнение субдиффузии, обратная задача, интегральное условие переопределения, функция Миттаг–Леффлера, интегральное уравнение Вольтерра.

INVERSE PROBLEMS FOR FRACTIONAL-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ADDITIONAL INTEGRAL CONDITIONS

Abstract. The paper studies the inverse problem of determining a time-dependent factor of the source term in a subdiffusion equation with the Gerasimov–Caputo time-fractional derivative under an additional integral overdetermination condition. Using the Fourier method, the solution of the direct problem is expressed via Mittag-Leffler functions, and the inverse problem is reduced to a Volterra integral equation of the second kind with a weakly singular kernel. Existence, uniqueness and stability of the solution are proved. A model example with an explicit solution is given.

Keywords: fractional derivative, Caputo derivative, subdiffusion equation, inverse problem, integral overdetermination condition, Mittag-Leffler function, Volterra integral equation.

Kirish. So‘nggi o‘n yilliklarda kasr tartibli differensial tenglamalar anomal diffuziya, g‘ovak muhitlarda filtratsiya, qovushqoq-elastik materiallar mexanikasi, biologik to‘qimalarda modda tarqalishi kabi jarayonlarni modellashtirishda keng qo‘llanilmoqda [12, 16]. Bunday jarayonlarda “xotira effekti” mavjud bo‘lib, tizimning joriy holati uning butun oldingi tarixiga bog‘liq bo‘ladi. Bu xususiyat vaqt bo‘yicha kasr tartibli hosila, xususan, Gerasimov–Kaputo hosilasi orqali tabiiy ravishda ifodalanadi.

Amaliy masalalarda ko‘pincha jarayonni tavsiflovchi tenglamaning ba’zi koeffitsiyentlari, manba funksiyasi yoki boshlang‘ich holati noma’lum bo‘ladi va ularni yechim haqidagi qo‘shimcha axborot asosida tiklash talab etiladi. Bunday masalalar teskari masalalar deb ataladi [13]. Teskari masalada qo‘shimcha axborot turli ko‘rinishda berilishi mumkin: biror nuqtadagi qiymat, oxirgi vaqt momentidagi holat yoki fazoviy soha bo‘yicha o‘rtacha qiymat. Oxirgi holat - integral qo‘shimcha shart - amaliy nuqtai nazardan ayniqsa qulaydir, chunki real o‘lchash asboblari odatda bitta nuqtadagi emas, balki biror hajm bo‘yicha o‘rtalashtirilgan kattalikni qayd etadi. Butun tartibli parabolik tenglamalar uchun

bunday shartli teskari masalalar V.L. Kamynin tomonidan batafsil o‘rganilgan [14].

Kasr tartibli tenglamalar uchun teskari masalalar nazariyasining rivojlanishida o‘zbek matematiklari salmoqli hissa qo‘shmoqda. R.R. Ashurov va Yu.E. Fayziev ixtiyoriy musbat o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorli subdiffuziya tenglamasi uchun nolokal shartli teskari masalalarda yechimning yagonaligini tadqiq qilgan [1], to‘lqin tenglamasida kasr hosila tartibini aniqlash masalasini [2], shuningdek, Riman–Liuvill hosilali subdiffuziya tenglamasida kasr tartib va manba funksiyasini bir vaqtda aniqlash masalasini Fur’e usulida yechgan [3]. Sh.A. Alimov va R.R. Ashurov Riman–Liuvill hosilasi tartibini aniqlash bo‘yicha teskari masalani o‘rgangan [4]. R.R. Ashurov, Z.A. Sobirov va A.A. Turemuratovalar metrik yulduz-graf ustida fazo-vaqt bo‘yicha kasr tartibli parabolik tenglama uchun integral qo‘shimcha shartli teskari manba masalasini birinchi bo‘lib Sobolev fazolarida qarashgan [5].

D.K. Durdiev va uning shogirdlari (Buxoro maktabi) integral qo‘shimcha shartli teskari masalalarni tizimli ravishda tadqiq qilmoqda. Jumladan, o‘zgaruvchan koeffitsiyentli bir o‘lchovli kasr diffuziya tenglamasida o‘ng tomonning vaqtga bog‘liq ko‘paytuvchisini aniqlash masalasida vazn funksiyasi sifatida manbaning fazoviy ko‘paytuvchisi olinishi yechimni oshkor ko‘rinishda qurish imkonini bergan [6]. Ko‘p o‘lchovli kasr to‘lqin tenglamasi uchun ikki xil integral shartli teskari manba masalalari [7], davriy chegaraviy va integral shartli koeffitsiyentni tiklash masalalari [8, 11], noma’lum koeffitsiyent va manbani birgalikda aniqlash masalasining sonli yechimi [9] hamda kasr to‘lqin tenglamasi uchun integral shartli teskari koeffitsiyent masalasi [10] o‘rganilgan. Matematik fizika tenglamalarining klassik nazariyasi o‘zbek tilida M.S. Salohiddinov darsligida bayon qilingan [15].

Ushbu ishning maqsadi - umumiy vazn funksiyali integral qo‘shimcha shart berilganda subdiffuziya tenglamasi o‘ng tomonining vaqtga bog‘liq ko‘paytuvchisini aniqlash masalasining korrektligini (mavjudlik, yagonalik, turg‘unlik) isbotlash va vazn funksiyasi manbaning fazoviy qismi bilan ustma-ust tushmagan holni ham qamrab olishdir.

Material va usullar

1. Asosiy ta’riflar.

h(t) funksiyaning $0 < \alpha < 1$ tartibli Gerasimov–Kaputo hosilasi quyidagicha aniqlanadi [12]:

$\partial^{\alpha} h(t) = (1/\Gamma(1-\alpha)) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} h'(s)\, ds$, (1)

bu yerda $\Gamma(\cdot)$ - Eylerning gamma funksiyasi. Ikki parametrli Mittag-Leffler funksiyasi

$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\alpha n + \beta)$, $E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z)$ (2)

ko‘rinishda bo‘lib, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ va $z \geq 0$ uchun quyidagi baho o‘rinli [12, 16]:

$0 < E_{\alpha,\beta}(-z) \leq C / (1+z)$, $C = C(\alpha, \beta) > 0$. (3)

2. Masalaning qo‘yilishi.

$Q_T = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ sohada quyidagi tenglamani qaraymiz:

$\partial^{\alpha} u(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(t) h(x) + g(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$, (4)

boshlang‘ich va chegaraviy shartlar:

$u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$; $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $0 \leq t \leq T$. (5)

Agar f(t) ma’lum bo‘lsa, (4)–(5) to‘g‘ri masala bo‘ladi. Biz f(t) noma’lum bo‘lgan holni qaraymiz va uni aniqlash uchun quyidagi qo‘shimcha integral shartni beramiz:

$\int_0^l \omega(x)\, u(x,t)\, dx = \psi(t)$, $0 \leq t \leq T$, (6)

bu yerda $\omega(x)$ - o‘lchash asbobining sezgirligini ifodalovchi ma’lum vazn funksiyasi, $\psi(t)$ - o‘lchash natijasi.

Teskari masala. φ, h, g, ω, ψ funksiyalar berilgan bo‘lsin. (4)–(6) shartlarni qanoatlantiruvchi $\{u(x,t), f(t)\}$ juftlikni toping.

Berilganlarga quyidagi shartlarni qo‘yamiz:

(A1) $\varphi \in C^2[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$; $h \in C^2[0,l]$, $h(0) = h(l) = 0$; $g, g_x, g_{xx} \in C(Q_T)$, $g(0,t) = g(l,t) = 0$;

(A2) $\omega \in C^2[0,l]$, $\omega(0) = \omega(l) = 0$;

(A3) $\psi \in AC[0,T]$, $\partial^{\alpha}\psi \in C[0,T]$ va moslik sharti $\psi(0) = \int_0^l \omega(x)\varphi(x)dx$ bajariladi;

(A4) $h_0 := \int_0^l \omega(x) h(x)\, dx \neq 0$.

3. Tadqiqot usuli.

Tadqiqotda Fur’e (o‘zgaruvchilarni ajratish) usuli, Mittag-Leffler funksiyalarining xossalari, kuchsiz maxsus yadroli Volterra integral tenglamalari nazariyasi, Banax fazosida qisqartirib akslantirish prinsipi va umumlashgan (singulyar) Gronuoll tengsizligidan foydalaniladi [8, 10, 13]. $X_k(x) = \sqrt{(2/l)} \sin(\pi k x/l)$, $\lambda_k = (\pi k/l)^2$, $k = 1, 2, \ldots$ - Shturm–Liuvill masalasining xos funksiyalari va xos qiymatlari bo‘lib, ular $L_2(0,l)$ da ortonormal bazis tashkil qiladi. Ixtiyoriy v funksiyaning Fur’e koeffitsiyentlarini $v_k = (v, X_k)$ bilan belgilaymiz.

Natijalar

1. To‘g‘ri masala yechimi.

Yechimni $u(x,t) = \sum u_k(t) X_k(x)$ qator ko‘rinishida izlab, (4)–(5) dan $u_k(t)$ uchun kasr tartibli Koshi masalasini hosil qilamiz:

$\partial^{\alpha} u_k(t) + \lambda_k u_k(t) = f(t) h_k + g_k(t)$, $u_k(0) = \varphi_k$. (7)

Uning yechimi [12] quyidagicha:

$u_k(t) = \varphi_k E_{\alpha}(-\lambda_k t^{\alpha}) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-s)^{\alpha}) [f(s) h_k + g_k(s)]\, ds$. (8)

(A1) shartlarda $\sum \lambda_k |\varphi_k| < \infty$, $\sum \lambda_k |h_k| < \infty$ bo‘lib, (3) baho yordamida qator va uning x bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilasi Q_T da tekis yaqinlashishi ko‘rsatiladi. Demak, har bir $f \in C[0,T]$ uchun to‘g‘ri masala yagona regulyar yechimga ega va quyidagi baho o‘rinli:

$\|u(\cdot,t)\|_{C^{2}} \leq C_1 (\|\varphi\|_{C^{2}} + \|g\| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s)|\, ds)$. (9)

2. Teskari masalani integral tenglamaga keltirish.

(6) tenglikka ∂_t^α operatorini qo‘llaymiz va (4) dan foydalanamiz. (A2) shartga ko‘ra ikki marta bo‘laklab integrallash $\int \omega u_{xx} dx = \int \omega'' u\, dx$ tenglikni beradi. Natijada:

$$\partial_t^\alpha \psi(t) = \int_0^l \omega''(x)\, u(x,t)\, dx + f(t)\, h_0 + \int_0^l \omega(x)\, g(x,t)\, dx. \quad (10)$$

(A4) ni hisobga olib, (8) ni (10) ga qo‘ysak, $\omega''_k = -\lambda_k \omega_k$ ekanidan f(t) uchun ikkinchi tur Volterra integral tenglamasiga kelamiz:

$$f(t) = F_0(t) + \int_0^t K(t-s) f(s)\, ds, \quad (11)$$

bu yerda

$$K(\tau) = (1/h_0) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \omega_k h_k \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha), \quad (12)$$

$$F_0(t) = (1/h_0) \left[\partial_t^\alpha \psi(t) - (\omega, g(\cdot,t)) + \sum_k \lambda_k \omega_k \left(\varphi_k E_\alpha(-\lambda_k t^\alpha) + (G_k)(t) \right) \right], \quad (13)$$

$G_k(t)$ - (8) dagi g_k ga mos integral had. (A1)–(A2) shartlarda $\sum \lambda_k |\omega_k h_k| \le (\sum \lambda_k^2 \omega_k^2)^{1/2} (\sum h_k^2)^{1/2} = \|\omega''\| \cdot \|h\| < \infty$ bo‘ladi, shuning uchun (3) bahodan

$$|K(\tau)| \le K_0 \tau^{\alpha-1},\ K_0 = C(\alpha,\alpha)\, \|\omega''\|\, \|h\| / |h_0|, \quad (14)$$

ya’ni yadro kuchsiz (integrallanuvchi) maxsuslikka ega. Bundan tashqari, (A3) ga ko‘ra $F_0 \in C[0,T]$.

Lemma 1. (A1)–(A4) shartlarda {u, f} juftlik (4)–(6) teskari masalaning yechimi bo‘lishi uchun $f \in C[0,T]$ funksiya (11) tenglamaning yechimi va u - (8) formula bilan aniqlangan funksiya bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot g‘oyasi. Zaruriyligi yuqoridagi hisoblashlardan kelib chiqadi. Yetarliligi uchun (10) ni chapdan I^α kasr integral operatori bilan integrallab, (A3) dagi moslik sharti yordamida (6) tiklanadi.

3. Asosiy teorema.

Teorema 1 (mavjudlik va yagonalik). (A1)–(A4) shartlar bajarilsin. U holda ixtiyoriy $T > 0$ uchun (4)–(6) teskari masala yagona {u, f} yechimga ega, bunda $f \in C[0,T]$, u - to‘g‘ri masalaning regulyar yechimi.

Isbot. $C[0,T]$ fazoda $(Af)(t) = F_0(t) + \int_0^t K(t-s) f(s) ds$ operatorini qaraymiz. (14) bahodan foydalanib, matematik induksiya bilan n-darajali iteratsiya uchun

$$|(A^n f_1 - A^n f_2)(t)| \le (K_0 \Gamma(\alpha))^n t^{n\alpha} / \Gamma(n\alpha + 1) \cdot \|f_1 - f_2\|_C \quad (15)$$

bahoni olamiz. $\Gamma(n\alpha + 1)$ gamma funksiya $(K_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha)^n$ dan tezroq o‘sgani uchun yetarlicha katta n da A^n qisqartiruvchi akslantirish bo‘ladi. Banax prinsipining umumlashmasiga ko‘ra (11) tenglama $C[0,T]$ da yagona yechimga ega. Lemma 1 ga ko‘ra teorema isbotlandi. ■

Ta’kidlash joizki, yadroning kuchsiz maxsusligi tufayli natija global xarakterga ega, ya’ni T ning kichikligi talab etilmaydi. Bu [8, 10] dagi koeffitsiyentli (nochiziqli) teskari masalalardan farqli bo‘lib, u yerda faqat lokal mavjudlik isbotlanadi.

Teorema 2 (turg‘unlik). $\{u(i), f(i)\}$, i = 1, 2 - mos ravishda $(\varphi(i), g(i), \psi(i))$ berilganlarga mos yechimlar bo‘lsin. U holda shunday $C_2 = C_2(\alpha, T, K_0) > 0$ o‘zgarmas mavjudki,

$$\|f(1) - f(2)\|_C \le C_2 \left(\|\partial_t^\alpha(\psi(1) - \psi(2))\|_C + \|\varphi(1) - \varphi(2)\|_{C^{\{2\}}} + \|g(1) - g(2)\| \right). \quad (16)$$

Isbot. Ayirma (11) ko‘rinishdagi tenglamani qanoatlantiradi; umumlashgan Gronuoll tengsizligi $|w(t)| \le a + K_0 \int (t-s)^{\alpha-1} |w(s)| ds \Longrightarrow |w(t)| \le a \cdot E_\alpha(K_0 \Gamma(\alpha) t^\alpha)$ dan (16) kelib chiqadi; u uchun baho (9) dan olinadi. ■

4. Model misol.

$l = \pi$, $h(x) = \omega(x) = \sin x$, $\varphi \equiv 0$, $g \equiv 0$, $\psi(t) = (\pi/2) t^2$ bo‘lsin. Bunda faqat k = 1 garmonika qatnashadi: $u(x,t) = v(t) \sin x$, $\psi(t) = (\pi/2) v(t)$, demak $v(t) = t^2$. (7) tenglamadan $\partial_t^\alpha v + v = f(t)$, ya’ni

$$f(t) = t^2 + 2\, t^{2-\alpha} / \Gamma(3 - \alpha),\ u(x,t) = t^2 \sin x. \quad (17)$$

Bu holda $\omega = h$ bo‘lgani uchun yechim oshkor ko‘rinishda topiladi (qiyoslang: [6]). 1-jadvalda turli α qiymatlarida f(t) ning qiymatlari keltirilgan.

1-jadval

Model misolda noma’lum f(t) funksiyaning turli α dagi qiymatlari

α \ t	**0,2**	**0,4**	**0,6**	**0,8**	**1,0**
0,3	0,1239	0,4327	0,9033	1,5260	2,2948
0,5	0,1746	0,5406	1,0592	1,7165	2,5045
0,7	0,2515	0,6809	1,2424	1,9226	2,7142
0,9	0,3654	0,8575	1,4496	2,1352	2,9112

Jadvaldan ko‘rinadiki, berilgan o‘lchash natijasi $\psi(t)$ bir xil bo‘lganda ham, kasr tartib α ortishi bilan tiklanadigan manba intensivligi ortadi. $\alpha \to 1$ da (17) formula klassik issiqlik tenglamasidagi $f(t) = t^2 + 2t$ natijaga, $\alpha \to 0$ da esa $f(t) = 2t^2$ ga intiladi.

Muhokama

Olingan natijalarni ma’lum tadqiqotlar bilan solishtiramiz. D.K. Durdiev ishida [6] vazn funksiyasi manbaning fazoviy ko‘paytuvchisiga teng ($\omega = h$) qilib tanlangan va bu yechimni oshkor qurishga imkon bergan. Ushbu maqolada esa ω ixtiyoriy (A2) shartni qanoatlantiruvchi funksiya bo‘lib, faqat $\int \omega h\, dx \ne 0$ talab qilinadi. Bu o‘lchash asbobining sezgirlik xarakteristikasini erkin tanlash imkonini beradi; buning evaziga masala oshkor formulaga emas, balki Volterra integral tenglamasiga keladi. $\omega = h$ holida esa (12) yadro umuman nolga aylanmaydi, ammo model misolda ko‘rsatilganidek, bir garmonikali holda yechim oshkor topiladi.

R.R. Ashurov va Yu.E. Fayziev ishlarida [1, 3] qo‘shimcha shart sifatida yechimning biror vaqt momentidagi qiymati

olinadi va bunda yechimning yagonaligi Mittag-Leffler funksiyasining nollari bilan bog‘liq nozik shartlarga bog‘liq bo‘ladi. Integral shart esa har bir t uchun axborot berishi (o‘lchash uzluksiz olib borilishi) sababli masalani “yaxshiroq” korrekt qiladi: yagonalik qo‘shimcha spektral shartlarsiz, global ravishda isbotlanadi. Shu bilan birga, (16) bahoda ψ ning α-tartibli hosilasi qatnashadi, ya’ni o‘lchash xatoliklari kasr tartibli differensiallash orqali kuchayadi. Bu - teskari masalalarga xos bo‘lgan nokorrektlikning yumshoq ko‘rinishi bo‘lib, sonli hisoblashlarda regulyarizatsiya talab qilishi mumkin [9, 13].

Natijalarni ko‘p o‘lchovli sohalarga [7], metrik graflarga [5], davriy chegaraviy shartlarga [8, 11] va to‘lqin-diffuziya tenglamalariga ($1 < \alpha < 2$) [10] umumlashtirish tabiiy davom hisoblanadi. Shuningdek, (11) tenglamani bo‘lakli-o‘zgarmas yaqinlashtirish va chekli ayirmalar sxemasi asosida sonli yechish algoritmini qurish [9] amaliy ahamiyatga ega.

Xulosa.

Maqolada Gerasimov–Kaputo kasr hosilali subdiffuziya tenglamasi uchun o‘ng tomonning vaqtga bog‘liq ko‘paytuvchisini qo‘shimcha integral shart bo‘yicha aniqlash teskari masalasi o‘rganildi. Asosiy natijalar quyidagilardan iborat:

1) Fur’e usuli yordamida to‘g‘ri masala yechimi Mittag-Leffler funksiyalari orqali qurildi va uning regulyarligi ko‘rsatildi;

2) teskari masala kuchsiz maxsus yadroli ikkinchi tur Volterra integral tenglamasiga ekvivalent ekani isbotlandi;

3) ixtiyoriy $T > 0$ da teskari masala yechimining mavjudligi va yagonaligi (global natija) hamda berilganlarga uzluksiz bog‘liqligi isbotlandi;

4) aniq yechimli model misol yordamida kasr tartib α ning tiklanayotgan manbaga ta’siri ko‘rsatildi.

Olingan natijalar anomal diffuziya jarayonlarida o‘rtalashtirilgan o‘lchashlar asosida noma’lum manba intensivligini aniqlash masalalarida qo‘llanilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

[1] Ashurov R., Fayziev Yu. On the uniqueness of solutions of two inverse problems for the subdiffusion equation // Fractional Differential Calculus. – 2022. – Vol. 12, No. 1. – P. 77–90. DOI: 10.7153/fdc-2022-12-05.

[2] Ашуров Р.Р., Файзиев Ю.Э. Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении // Математические заметки. – 2021. – Т. 110, № 6. – С. 824–836.

[3] Ashurov R., Fayziev Yu. Determination of fractional order and source term in subdiffusion equations // Eurasian Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 13, No. 1. – P. 19–31.

[4] Alimov Sh., Ashurov R. Inverse problem of determining an order of the Riemann–Liouville time-fractional derivative // Progress in Fractional Differentiation and Applications. – 2022. – Vol. 8, No. 4. – P. 467–474.

[5] Ashurov R.R., Sobirov Z.A., Turemuratova A.A. Inverse source problem for the space-time fractional parabolic equation on a metric star graph with an integral overdetermination condition // Математические заметки. – 2024. – Т. 116, № 5. – С. 892–904.

[6] Durdiev D.K. Inverse problem of determining the right-hand side of a one-dimensional fractional diffusion equation with variable coefficients // arXiv:2411.08922. – 2024.

[7] Durdiev D.K. Inverse source problems for a multidimensional time-fractional wave equation with integral overdetermination conditions // arXiv:2503.17404. – 2025.

[8] Durdiev D.K., Jumaev J.J. Solvability of a coefficient recovery problem for a time-fractional diffusion equation with periodic boundary and overdetermination conditions // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2025. – Т. 29, № 1. – С. 21–36.

[9] Jumaev J.J., Bozorov Z.R., Durdiev D.K. Numerical solution of the problem of finding two unknowns in time-fractional diffusion equations // Известия вузов. Математика. – 2025. – № 7. – С. 36–52.

[10] Turdiev H.H., Durdiev D.K. Inverse coefficient problem for a time-fractional wave equation with initial-boundary and integral type overdetermination conditions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2024. DOI: 10.1002/mma.9867.

[11] Jumaev J.J., Durdiev D.K., Bozorov Z.R. Solvability of an inverse coefficient problem for a time-fractional diffusion equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions // TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics. – 2025. – Vol. 15, No. 6.

[12] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.

[13] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. – New York: Marcel Dekker, 2000.

[14] Камынин В.Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Математические заметки. – 2005. – Т. 77, № 4. – С. 522–524.

[15] Salohiddinov M.S. Matematik fizika tenglamalari. – Toshkent: O‘zbekiston, 2002.

[16] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. – М.: Наука, 2005.