

ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI CASE TEXNOLOGIYASI ASOSIDA O'QITISH METODIKASI

S.H.Xoliqov¹

Mas'ul muallif: Xoliqov Suyunjon Hamroqul o'g'li, Osiyo xalqaro universiteti, Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar kafedrasida dotsenti.

Accepted: 23 Sentabr 2026

Published: 23 Sentabr 2026

Copyright: © 2026 by the author(s). Licensee Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi.

Iqtibos uchun: Xoliqov, S. H. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI CASE TEXNOLOGIYASI ASOSIDA O'QITISH METODIKASI / S. H. Xoliqov // Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi. — 2026. — T. 9, № 2. — B. 322–326.

1. Osiyo xalqaro universiteti, Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar kafedrasida dotsenti

Annotatsiya. Maqolada oddiy differensial tenglamalarni CASE texnologiyasi asosida o'qitishning analitik, sonli va sifat tahlilini birlashtiruvchi metodik modeli taklif etiladi. Yondashuvda differensial tenglama tayyor obyekt sifatida emas, real yoki realga yaqin vaziyatni modellashtirish natijasi sifatida quriladi. Model vaziyatni tahlil qilish, o'zgaruvchi va parametrlarni tanlash, farazlarni asoslash, ODTni tuzish, turli usullar bilan yechish, natijalarni taqqoslash, interpretatsiya va variatsiyalash bosqichlarini qamrab oladi. Metodika o'zgaruvchan hajmli aralashma, kvadratik qarshilikli harakat, davriy issiqlik almashinuvi va doimiy ajratib olishli logistik tizim misollarida yoritiladi.

Kalit so'zlar: oddiy differensial tenglama, CASE texnologiyasi, case-study, matematik modellashtirish, Eyler usuli, Runge-Kutta usuli, sifat tahlili, muvozanat holati, matematik kompetensiya.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ НА ОСНОВЕ CASE-ТЕХНОЛОГИИ

Аннотация. В статье предлагается методическая модель обучения обыкновенным дифференциальным уравнениям на основе CASE-технологии, объединяющая аналитический, численный и качественный анализ. В рамках данного подхода дифференциальное уравнение рассматривается не как готовый объект изучения, а как результат моделирования реальной или приближённой к реальности ситуации. Модель охватывает такие этапы, как анализ ситуации, выбор переменных и параметров, обоснование предположений, составление обыкновенного дифференциального уравнения, решение различными методами, сопоставление результатов, их интерпретация и варьирование условий задачи. Методика иллюстрируется на примерах смеси с переменным объёмом, движения с квадратичным сопротивлением, периодического теплообмена и логистической системы с постоянным изъятием.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, CASE-технология, case-study, математическое моделирование, метод Эйлера, метод Рунге-Кутты, качественный анализ, состояние равновесия, математическая компетентность.

A METHODOLOGY FOR TEACHING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BASED ON CASE TECHNOLOGY

Abstract. The paper proposes an integrated methodological model for teaching ordinary differential equations (ODEs) through case-based learning. Instead of presenting an ODE as a ready-made mathematical object, students construct it by mathematizing a real or realistic situation. The model combines situation analysis, identification of variables and parameters, justification of assumptions, formulation of the ODE, analytical and numerical solution, qualitative analysis, comparison, interpretation and validation. The approach is illustrated by four cases: variable-volume mixing, motion with quadratic drag, periodic heat exchange, and a logistic model with constant harvesting.

Keywords: ordinary differential equations, case-based learning, mathematical modelling, Eyler method, Runge-Kutta method, qualitative analysis, equilibrium, mathematical competence.

Kirish. Oddiy differensial tenglamalar (ODT) matematika, fizika, texnika, biologiya va iqtisodiyotdagi dinamik jarayonlarni tavsiflashning asosiy vositalaridan biridir. An'anaviy mashg'ulotlarda tenglama turi ko'pincha oldindan berilib, talaba standart yechish algoritmini qo'llaydi. Bu hisoblash ko'nikmasini shakllantiradi, biroq tenglamaning qanday hosil bo'lgani, parametrlarning mazmuni va yechimning real jarayonga mosligi kabi savollar yetarlicha yoritilmasligi mumkin.

ODT ta'limiga oid tadqiqotlarda yechimni funksiya sifatida anglash, simvolik, grafik va sonli tasvirlar orasida o'tish hamda o'zgarish tezligini mazmunan talqin qilish muhimligi ko'rsatilgan [1, 2]. Matematik modellashtirishga asoslangan yondashuv model va yechim orasidagi bog'lanishni kuchaytiradi [3-7], faol ta'lim esa talabani tayyor algoritim

ijrochisidan muammoni tahlil qiluvchi subyektga aylantiradi [8, 9,10].

CASE (case-study) texnologiyasida markazga tayyor differensial tenglama emas, balki matematiklashtirishni talab qiluvchi vaziyat qo'yiladi. Talaba noma'lum funksiyani, muhim ma'lumotlarni va soddalashtiruvchi farazlarni tanlaydi, so'ng jarayon qonunidan differensial modelni hosil qiladi. Shu tariqa tenglama masalaning boshlanish nuqtasi emas, balki tahlil natijasiga aylanadi.

Tadqiqot metodologiyasi. Metodik model uch yo'nalishga tayanadi: ko'p tasvirli yondashuv, matematik modellashtirish va faol ta'lim. Birinchisi ODTni formula bilan cheklamasdan grafik, sonli jadval va variatsion talqin bilan bog'laydi [1, 2]; ikkinchisi real vaziyatdan modelga va modeldan real vaziyatga qaytuvchi siklni shakllantiradi [3-5]; uchinchisi esa talabaning faraz qilish, dalillash va usul tanlashdagi faolligini kuchaytiradi [8, 9,10].

An'anaviy ODT masalasi bilan CASE topshirig'i o'rtasidagi asosiy metodik farqlar 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval.

Mezon	An'anaviy topshiriq	CASE topshirig'i
Boshlanish nuqtasi	Tayyor differensial tenglama	Real yoki realga yaqin vaziyat
Asosiy faoliyat	Mos yechish algoritmini qo'llash	Matematiklashtirish va usul tanlash
Farazlar	Odatda yashirin yoki berilgan	Talaba tomonidan aniqlanadi va asoslanadi
Yechim	Ko'pincha bitta analitik usul	Analitik, sonli va sifat usullari taqqoslanadi
Grafik/jadval	Ko'rgazmali qo'shimcha	Dalillash va validatsiya vositasi
Yakuniy savol	"Yechimni toping"	"Model nimani anglatadi va qachon ishonchli?"
Baholash	Yakuniy formula va hisob	Model, usul, talqin, xato va kommunikatsiya

1-jadval. An'anaviy ODT masalasi va CASE topshirig'ining metodik farqlari

1-jadvaldan ko'rinadiki, CASE yondashuvida asosiy e'tibor tayyor algoritmi qo'llashdan modelni qurish, usul tanlash va natijani asoslashga ko'chadi. Analitik tahlil parametrlar va formulaviy bog'lanishlarni ochadi, sonli tahlil approksimatsiya va xatoni baholashga, sifat tahlili esa muvozanat, turg'unlik va asimptotik xatti-harakatni aniqlashga xizmat qiladi. Shu sababli grafik va jadval ko'rgazmali qo'shimcha emas, balki interpretatsiya va variatsiya vositasiga aylanadi.

CASE 1: o'zgaruvchan hajmli aralashma jarayoni

Vaziyat : Texnologik idishda dastlab 100 litr eritma va 20 kg erigan modda bor. Konsentratsiyasi 0.5 kg/litr bo'lgan eritma 6 tezlik bilan kiritilib, bir jinsli aralashma 4 tezlikda chiqariladi. Kirish va chiqish sarflari turlicha bo'lgani uchun hajm vaqtga bog'liq; bu holat standart doimiy hajmli modelni bevosita qo'llashga imkon bermaydi.

Bu vaziyatning didaktik qiyinligi shundaki, talaba standart "doimiy hajmli aralashma" formulasini mexanik qo'llay olmaydi. Hajm

bo'lib, vaqtga bog'liq.

- idishdagi modda miqdori (kg) bo'lsin. Balans qonuni

ko'rinishida yoziladi. Kirishdagi modda tezligi

chiqishdagi joriy konsentratsiya esa . Shuning uchun

Birinchi usul: uchun integrallovchi ko'paytuvchi

Ushbu tenglama

ko'rinishidagi chiziqli tenglamadir. Integrallovchi ko'paytuvchi

Shu sababli

Integrallasdan

va

kelib chiqadi. shartdan . Demak,

Ikkinchi usul: konsentratsiyani bevosita noma'lum sifatida tanlash

Endi deb olamiz. Bu usul bir xil fizik tizim uchun noma'lum funksiyani boshqacha tanlash modelni qanday o'zgartirishini ko'rsatadi. bo'lganligi sababli

Balans tenglamasiga qo'ysak,

ya'ni

Shundan

Integrallovchi ko'paytuvchi . Natijada

orqali yuqoridagi formulasi yana hosil bo'ladi. Bu ikki usulning taqqoslanishi talabaning "model bitta, matematik reprezentatsiya esa turlicha bo'lishi mumkin" degan fikrni anglashiga yordam beradi.

Sonli tekshiruv: Eyler va RK4

Ushbu tenglama uchun Eyler usuli

Analitik yechim Eyler va to'rtinchi tartibli Runge-Kutta (RK4) usullari bilan tekshirildi. Bir xil qadamda RK4 qiymatlari aniq yechimga juda yaqin bo'lib, Eyler usulidagi og'ish sezilarliroq bo'ldi. Masalan, $t=20$ min da aniq qiymat 54.6939 kg, Eyler natijasi 56.1538 kg, RK4 natijasi esa 54.6938 kg bo'ldi. Bu taqqoslash qadam va usul tartibining hisoblash aniqligiga ta'sirini muhokama qilish imkonini beradi.

CASE 2: kvadratik qarshilikli muhitda jism harakati

Vaziyat: Massasi 80 kg bo'lgan jism vertikal pastga boshlang'ich tezliksiz harakat qiladi; qarshilik kuchi tezlik kvadratiga proporsional. Talaba tezlik funksiyasini topish bilan birga terminal tezlikni analitik va sifat tahlili orqali aniqlaydi hamda natijani sonli usullar bilan tekshiradi.

Pastga yo'nalishni musbat deb olsak, Nyutonning ikkinchi qonuni

yoki

Bu tenglama chiziqli emas. Mazkur holat birinchi tartibli differensial tenglamalarning barchasi chiziqli usullar bilan yechilmasligini ko'rsatadi va tenglama turini aniqlash bosqichining ahamiyatini kuchaytiradi.

Birinchi usul: o'zgaruvchilarni ajratish

Terminal tezlik

deb belgilansa,

Ajratish natijasida

shartdan

Berilgan parametrlar uchun

Jism terminal tezlikning 95 foiziga qachon erishishini ham formula orqali topish mumkin:

Ikkinchi usul: o'lchamsizlashtirish va sifat tahlili

Quyidagi o'lchamsiz kattaliklarni kiritamiz:

Hosil bo'lgan tenglama juda sodda universal ko'rinishga keladi:

Bu formulada jism massasi, va alohida ko'rinmaydi; barcha fizik parametrlar masshtablashda "yutilgan". Muvozanatlar. Musbat tezliklar sohasi uchun da , da . Demak, barqaror muvozanat. Terminal tezlikni yechim formulasini topmasdan ham sifat tahlili orqali aniqlash mumkin.

Bu CASEdagi muhim metodik natija: terminal tezlik formuladagi limitdan ham, avtonom tenglamaning muvozanatidan ham olinadi. Talaba bir xil fizik xulosaning ikki matematik manbasini ko'radi.

Sonli yechim va xato tahlili: Analitik, Eyler va RK4 natijalari taqqoslanganda RK4 yechimi aniq yechimga yaqinroq ekani kuzatildi. Masalan, da aniq tezlik 49.6136Eyler natijasi 53.2098 m/s, RK4 natijasi 49.5958 m/s bo'ldi. Yechim terminal tezlikka yaqinlashgani sari o'zgarish tezligi kamayadi; shu sababli sonli xatoning dinamikasi faqat usul tartibiga emas, yechimning xatti-harakatiga ham bog'liq.

CASE 3: davriy tashqi harorat va doimiy isitish quvvatiga ega xona

Vaziyat: Xonaning tashqi harorati sutka davomida sinusoidal ravishda o'zgaradi:

bu yerda soatlarda. Bino va tashqi muhit orasidagi issiqlik almashinuvi koeffitsiyenti soat⁻¹. Isitish tizimi xonaga doimiy ravishda, harorat modeli bo'yicha 2 °C/soat ekvivalent ta'sir beradi. Boshlang'ich xona harorati 18 °C.

Energiya balansining soddalashtirilgan modeli

yoki

ko'rinishga keladi.

Bu CASE standart Nyuton sovish modelidan murakkabroq: tashqi harorat o'zgarmas emas, davriy ravishda o'zgaradi va tizim vaqt bo'yicha majburlangan chiziqli ODT bilan ifodalanadi.

Birinchi usul: integrallovchi ko'paytuvchi

Integrallovchi ko'paytuvchi. Shuning uchun

Integrallash orqali aniq formula olinadi. Biroq CASE metodikasida uzun integralning o'zi maqsad emas; asosiy savol

- yechimning tuzilishini ajratish: vaqt o'tishi bilan so'nuvchi o'tkinchi qism va qoluvchi davriy qism.

Ikkinchi usul: garmonik xususiy yechim

Mazkur tenglama uchun xususiy yechimni

ko'rinishda qidiramiz. Koeffitsiyentlarni tenglashtirishdan

Umumiy yechim

dan. Demak,

Bu formula CASE muhokamasiga juda boy material beradi. - boshlang'ich holatga bog'liq o'tkinchi jarayon; qolgan garmonik qism esa uzoq vaqtli davriy rejim. Xona harorati tashqi haroratning aynan nusxasi emas: amplituda kamayadi va fazaviy kechikish yuz beradi. Bu fizik mazmunni faqat integrallash algoritmi bilan ko'rish qiyin, garmonik yechim esa uni ochiq ko'rsatadi.

Sonli taqqoslash. Aniq yechim bilan sonli natijalarni taqqoslash RK4 usulining yuqori aniqligini ko'rsatadi. Masalan, t=24 soatda aniq harorat 17.3846 °C, Eyler natijasi 16.8989 °C, RK4 esa 17.3846 °C ni beradi. Modelning muhim fizik xulosasi shundaki, ichki harorat tashqi harorat maksimumini kechikib kuzatadi; boshlang'ich shart ta'siri esa vaqt o'tishi bilan eksponensial so'nadi.

CASE 4: doimiy ajratib olishga ega logistik tizim

Vaziyat: Cheklangan resursga ega populyatsiya uchun oddiy logistik model

ko'pincha o'rganiladi. CASEni murakkablashtirish uchun tizimdan har yili doimiy miqdor ajratib olinadi:

Modelda asosiy savol faqat yechimni topish emas, balki muvozanatlar soni, ularning barqarorligi va ajratib olish parametri kritik qiymatdan o'tganda tizim xatti-harakatining qanday o'zgarishini aniqlashdir.

Muvozanatlar

tenglamadan olinadi:

Haqiqiy muvozanat mavjud bo'lishi uchun

Berilgan parametrlar uchun, shuning uchun ikkita muvozanat mavjud:

Birinchi usul: ajratish va qism kasrlar

Logistik tenglamani

ko'rinishda yozamiz. uchun ajratish va qism kasrlardan so'ng qulay nisbat shakli olinadi:

bu yerda

Shundan

Masalan, uchun yechim ga yaqinlashadi.

Ikkinchi usul: faza chizig'i va barqarorlik

deb olamiz. Parabola pastga qaragan. da ; da ; da . Demak,

- beqaror muvozanat;

- barqaror muvozanat;

bo'lsa model populyatsiyaning kamayishini bashorat qiladi;

bo'lsa, yechim tegishli sohadan tomon intiladi.

Bu tahlilda yechim formulasini umuman ishlatmasdan tizimning eng muhim xususiyatlari aniqlanadi. Aynan shu nuqta CASEning sifat tahliliga oid markaziy maqsadidir.

Analitik va sonli natijalar .Sonli tekshiruv analitik va sifat tahlili bilan mos natija beradi. Masalan, tanlangan boshlang'ich qiymat uchun $t=10$ yilda aniq yechim 812.2384, Eyler 813.9225, RK4 esa 812.2379 qiymatini beradi. Faza tahlili barqaror muvozanatga turli yo'nalishlardan yaqinlashishni va beqaror muvozanatning ajratuvchi chegara vazifasini bajarishini ko'rsatadi.

CASElarni dars jarayonida tashkil etish. 80-90 daqiqalik mashg'ulotda CASE ishini quyidagi ketma-ketlikda tashkil etish mumkin: vaziyatni tushunish, muhim ma'lumotlarni ajratish, o'zgaruvchi va parametrlarni tanlash, farazlarni asoslash, ODT va boshlang'ich shartni qurish, guruhlarda analitik, sonli hamda sifat tahlilini bajarish, natijalarni taqqoslash va real mazmunda interpretatsiya qilish. O'qituvchi tayyor tenglamani bermaydi, balki yo'naltiruvchi savollar orqali model qurish jarayonini boshqaradi.

Muhokamada "qaysi kattalik vaqt bo'yicha o'zgaradi?", "hosilaning ishorasi nimani anglatadi?", "modeldagi hadlarning o'lchov birliklari mosmi?", "muvozanatni yechimni topmasdan aniqlash mumkinmi?", "Eyler va RK4 natijalari nega farq qiladi?" va "model qaysi shartlarda ishonchli?" kabi savollar qo'llanadi. Bu savollar talabani hisoblashdan modelni asoslash va himoya qilishga o'tishini ta'minlaydi.

Metodik natijalar va muhokama. To'rtta CASE tahlili uchta asosiy metodik natijani ko'rsatadi. Birinchidan, noma'lum funksiyani tanlashning o'zi matematik faoliyatdir: aralashma masalasida modda miqdori va konsentratsiya orqali turli ko'rinishdagi, lekin fizik jihatdan ekvivalent modellar olinadi. Ikkinchidan, sifat xulosasi faqat aniq formuladan kelib chiqmaydi: terminal tezlik va logistik muvozanatlar faza tahlili orqali ham aniqlanadi. Uchinchidan, sonli usullar analitik yechimni almashtirish uchun emas, uni tekshirish, qadam ta'sirini ko'rish va xato haqida fikrlash uchun xizmat qiladi.

CASE yondashuvi parametrlarni oddiy berilgan son emas, tizim xatti-harakatini boshqaruvchi omil sifatida talqin qilishga yordam beradi. Grafik va sonli natijalar esa dalillash vositasiga aylanadi. Metodikaning cheklovi shundaki, u ko'proq auditoriya vaqti, sonli hisob vositalari va guruh ishini puxta tashkil etishni talab qiladi; shu sababli CASE nazariy va algoritmik mashg'ulotlarni to'liq almashtirmasdan, ularni integratsiyalovchi faoliyat sifatida qo'llanishi maqsadga muvofiq.

Xulosa. ODTni o'qitishda talaba faqat standart yechish algoritmlarini emas, balki dinamik vaziyatni matematiklashtirish, o'zgaruvchi va parametrlarni tanlash, farazlarni asoslash, model qurish va natijani real mazmunda talqin qilishni ham egallashi zarur. Taklif etilgan CASE modeli ushbu faoliyatlarni analitik, sonli va sifat tahlili bilan yagona metodik siklda birlashtiradi.

Ko'rib chiqilgan CASElar o'zgaruvchi koeffitsiyentli chiziqli model, noxiziqli qarshilik, davriy majburlangan tizim va parametrga bog'liq logistik dinamikani turli usullar bilan tahlil qilish imkonini beradi. Usullar natijalarining o'zaro mosligi, sonli va muvozanatlarning tahlili talabani matematik fikrlashini kuchaytiradi. Keyingi tadqiqotlarda metodikaning samaradorligini pedagogik tajriba asosida baholash maqsadga muvofiq.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

[1] . Rasmussen C. L. New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. The Journal of Mathematical Behavior. 2001;20(1):55-87. doi:10.1016/S0732-3123(01)00062-1.

[2] . Rasmussen C. L., King K. D. Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2000;31(2):161-172. doi:10.1080/002073900287219.

[3] . Czochoer J. A. How can emphasizing mathematical modeling principles benefit students in a traditionally taught differential equations course? The Journal of Mathematical Behavior. 2017;45:78-94. doi:10.1016/j.jmathb.2016.10.006.

[4] . Spooner K. Using mathematical modelling to provide students with a contextual learning experience of differential equations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2024;55(2):565-573. doi:10.1080/0020739X.2023.2244472.

[5] . Lozada E., Guerrero-Ortiz C., Coronel A., Medina R. Classroom Methodologies for Teaching and Learning Ordinary Differential Equations: A Systemic Literature Review and Bibliometric Analysis. Mathematics. 2021;9(7):745. doi:10.3390/math9070745.

- [6] . Lozada E., Guerrero-Ortiz C., Coronel A., Medina R. Proposal of a Mathematical Modelling Activity to Facilitate Students' Learning of Ordinary Differential Equation Concepts. *Sustainability*. 2023;15(16):12483. doi:10.3390/su151612483.
- [7] . Rezvanifard F., Radmehr F., Rogovchenko Y. Advancing engineering students' conceptual understanding through puzzle-based learning: a case study with exact differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications*. 2023;42(2):126-149. doi:10.1093/teamat/hrac005.
- [8] . Freeman S., Eddy S. L., McDonough M., Smith M. K., Okoroafor N., Jordt H., Wenderoth M. P. Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2014;111(23):8410-8415. doi:10.1073/pnas.1319030111.
- [9] . Wijnia L., Noordzij G., Arends L. R., Rikers R. M. J. P., Loyens S. M. M. The Effects of Problem-Based, Project-Based, and Case-Based Learning on Students' Motivation: a Meta-Analysis. *Educational Psychology Review*. 2024;36:29. doi:10.1007/s10648-024-09864-3.
- [10] . Habre S. Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *The Journal of Mathematical Behavior*. 2000;18(4):455-472. doi:10.1016/S0732-3123(00)00024-9.

