ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR KURSIDA MATEMATIK ISBOTLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHNING METODIK MODELI

S.H.Xoliqov[1]

1. Osiyo xalqaro universiteti, Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar kafedrasi dotsenti

Mas'ul muallif: Xoliqov Suyunjon Hamroqul o‘g‘li, Osiyo xalqaro universiteti, Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar kafedrasi dotsenti.

Received: 04 Noyabr 2026
Accepted: 09 Noyabr 2026
Published: 14 Noyabr 2026

Copyright: © 2026 by the author(s). Licensee Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi.

Iqtibos uchun: Xoliqov, S. H. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR KURSIDA MATEMATIK ISBOTLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHNING METODIK MODELI / S. H. Xoliqov // Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi. — 2026. — T. 11, № 1. — B. 417–420.

Annotatsiya. Maqolada oliy ta’limning oddiy differensial tenglamalar kursida talabalarning matematik isbotlash kompetensiyasini rivojlantirish uchun shartni mantiqiy tahlil qilish, isbot strategiyasini tanlash, deduktiv dalillash, qarshi misol bilan tekshirish va refleksiyani yagona didaktik siklga birlashtiruvchi metodik model taklif qilinadi. Tadqiqotda matematik isbot va argumentatsiyaga oid ODT mazmunidagi asosiy isbot vazifalari didaktik tahlil qilindi, besh mezonli analitik rubrika ishlab chiqildi. Model chiziqli birinchi tartibli tenglamada Koshi masalasi yechimining yagonaligini isbotlash, Lipshits sharti buzilganda yagonalikning yo‘qolishini ko‘rsatish hamda yechimlarning kesishmasligi haqidagi tasdiqning qo‘llanish chegaralarini aniqlash misollarida ko‘rsatildi. Natijada o‘qitishning to‘rt bosqichi, beshta diagnostik ko‘rsatkich, darajali baholash tartibi va auditoriyada qo‘llash uchun topshiriqlar ketma-ketligi asoslandi.

Kalit so'zlar: oddiy differensial tenglamalar, matematik isbot, deduktiv tafakkur, isbotlash kompetensiyasi, Koshi masalasi, matematik argumentatsiya, metodik model.

МЕТОДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ КОМПЕТЕНЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В КУРСЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. В статье предлагается методическая модель развития компетенции математического доказательства у студентов в рамках курса обыкновенных дифференциальных уравнений высшего образования. Модель объединяет логический анализ условия задачи, выбор стратегии доказательства, дедуктивное аргументирование, проверку с помощью контрпримера и рефлексию в единый дидактический цикл. В исследовании проведен дидактический анализ основных типов доказательных задач, содержащихся в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений и связанных с математическим доказательством и аргументацией, а также разработана аналитическая рубрика по пяти критериям. Модель продемонстрирована на примерах доказательства единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка, выявления нарушения единственности при невыполнении условия Липшица, а также определения границ применимости утверждения о непересечении решений. В результате обоснованы четыре этапа обучения, пять диагностических показателей, уровневая система оценивания и последовательность заданий для применения в аудиторной практике.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, математическое доказательство, дедуктивное мышление, компетенция доказательства, задача Коши, математическая аргументация, методическая модель.

A METHODOLOGICAL MODEL FOR DEVELOPING MATHEMATICAL PROOF COMPETENCE IN THE COURSE OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. This article proposes a methodological model for developing students’ mathematical proof competence within the higher education course of ordinary differential equations. The model integrates logical analysis of problem conditions, selection of proof strategies, deductive reasoning, verification through counterexamples, and reflection into a unified didactic cycle. The study provides a didactic analysis of the main types of proof-based tasks in the ordinary differential equations curriculum related to mathematical proof and argumentation. An analytical rubric consisting of five criteria is also developed. The model is illustrated through examples involving the proof of the uniqueness of solutions to the Cauchy problem for a first-order linear differential equation, demonstrating the loss of uniqueness when the Lipschitz condition is violated, and identifying the applicability limits of the statement concerning the non-intersection of solutions. As a result, four stages of instruction, five diagnostic indicators, a level-based assessment system, and a sequence of classroom activities are substantiated.

Keywords: ordinary differential equations, mathematical proof, deductive reasoning, proof competence, Cauchy problem, mathematical argumentation, methodological model.

Kirish. Oliy matematika kurslarida tayyor yechish algoritmlarini qo‘llash bilan matematik bilimning mantiqiy asoslarini tushuntirish bir xil natija bermaydi. Xususan, ODTda talabalar integralni topish yoki o‘zgaruvchilarni ajratish orqali aniq yechimni olishi mumkin, biroq yechimning mavjudligi, yagonaligi, qo‘llanish sohasi va boshlang‘ich shartlarga bog‘liqligi haqidagi tasdiqlarni qat’iy isbotlashda qiynaladi. Shuning uchun ODTni o‘qitishda protseduraviy mahorat bilan isbotlash kompetensiyasini ajratib ko‘rish nazariy va amaliy ahamiyat kasb etadi.

Isbot va isbotlash bo‘yicha sistematik sharhda matematik dalilni o‘rganish o‘qituvchi, talaba va mazmun o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir bilan bog‘langan tadqiqot yo‘nalishi ekani qayd etiladi [1]. Veberning tadqiqoti zarur teorema va faktlarni bilishning o‘zi isbot strategiyasini tanlash uchun yetarli emasligini ko‘rsatgan [2]. Selden tadqiqotida esa oliy ta’lim talabalarida berilgan dalilning mantiqiy to‘g‘riligini baholash alohida murakkab vazifa ekanini aniqlagan [3]. ODT bo‘yicha Rasmussen tadqiqotlari yechimlarni grafik, sonli va funksional nuqtayi nazardan anglashdagi kognitiv to‘siqlarni yoritgan [4].

Mazkur ishda ilmiy muammo quyidagicha qo‘yiladi: ODTning aniq matematik mazmuniga tayangan holda talabaning isbotni tuzish, tekshirish va qo‘llanish shartlarini tanqidiy baholash faoliyatini qanday qilib sistemali tashkil qilish mumkin? Maqsad -ODT kursining tipik teorema va kontrmisollariga mos metodik modelni konstruksiya qilish, uning tarkibiy qismlari, topshiriqlari va baholash indikatorlarini matematik asoslash. Tadqiqot savollari:

(i) isbotlash kompetensiyasi qaysi kuzatiladigan harakatlarda namoyon bo‘ladi;

(ii) qanday topshiriqlar shart–xulosa munosabatini chuqur tushunishni talab qiladi; (iii) modelni keyinchalik empirik tekshirish uchun qanday o‘lchovlar zarur?

Adabiyotlar tahlili. Harel va Sowder talabalar dalilni qabul qilish usullarini “isbot sxemalari” tushunchasi orqali tahlil qilib, empirik tasdiq bilan deduktiv asoslashning epistemik farqini ko‘rsatgan [5]. Stylianides isbotni ma’lum matematik hamjamiyatda qabul qilinadigan mantiqiy bog‘lanishlar tizimi sifatida tavsiflash bilan uning didaktik elementlarini ajratadi [6]. Inglis, Mejia-Ramos va Simpson argumentatsiyani faqat da’vo va dalil ketma-ketligi bilan cheklamasdan, xulosaning qaysi shartlar ostida o‘rinli ekanini bildiradigan kvalifikatsiyalarni ham hisobga olish zarurligini asoslagan [7].

ODT didaktikasida Rasmussen va Kingning tadqiqoti birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni o‘zgarish tezligi bilan bog‘lash, talabalarning ananaviy tushuntirishidan formallashtirilgan usulga o‘tish imkoniyatini ko‘rsatadi [8]. Rasmussen va Kvon tavsiflagan ODT yondashuvi talabalarni matematik g‘oyani ishlab chiqish va muhokama qilishga faol jalb etadi [9]. Shu bilan birga, mazkur maqoladagi model aynan isbotning mantiqiy maqomini diagnostika qilishga yo‘naltirilishi bilan ajralib turadi.

Tadqiqot metodologiyasi. Tadqiqot turi - nazariy-metodik loyihalash (design-oriented conceptual study). Empirik tanlanma, nazorat guruhi yoki talaba ballari yo‘q. Tadqiqot birliklari sifatida

a) xalqaro ilmiy adabiyotlarda qayd etilgan isbotlashdagi murakkabliklar;

b) ODTning matematik jihatdan tekshiriladigan uch turdagi dalillash vazifasi;

(c) ushbu vazifalar asosida ishlab chiqilgan diagnostik indikatorlar olindi.

Metodik ish to‘rtta ketma-ket amal bilan bajarildi:

birinchidan, adabiyotlardan konstruktlar ajratildi (strategik bilim, argument validatsiyasi, shartning roli);

ikkinchidan, konstruktlar ODTdagi Koshi masalasi, yagonalik va kontr misolga moslashtirildi;

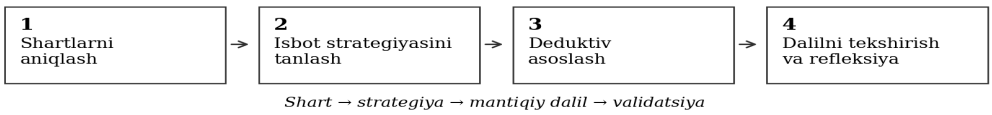
uchinchidan, har bir konstrukt o‘lchanadigan javob belgilariga aylantirildi;

to‘rtinchidan, topshiriqlar matematik tekshiruvdan o‘tkazilib, dalil va noto‘g‘ri umumlashtirish o‘rtasidagi farq ko‘rsatildi. Usul tadqiqot natijasini “isbotlangan samaradorlik” sifatida emas, tekshiriladigan didaktik gipoteza sifatida taqdim etadi.

Empirik sinov uchun oldindan belgilangan gipoteza: model asosida ta’lim olgan guruhning yakuniy isbotlash rubrikasi ballari odatiy algoritmik mashg‘ulot guruhiga nisbatan, boshlang‘ich ballar va o‘quv guruhini hisobga olganda, yuqoriroq bo‘ladi.

Isbotlash kompetensiyasining metodik modeli

Modelning birinchi bosqichi - semantik tahlil: talaba teorema shartlarini yozadi, ta’riflarni o‘zaro bog‘laydi va qaysi parametrlar ta’kidlanmaganini tekshiradi. Ikkinchi bosqich - isbot strategiyasi: to‘g‘ridan-to‘g‘ri isbot, farazdan qarama-qarshilikka keltirish yoki qarshi misol orasidan mantiqan adekvat yo‘l tanlanadi. -Uchinchi bosqich deduktiv konstruksiya: har bir o‘tishda foydalanilgan shart va tenglik asoslanadi. To‘rtinchi bosqich - validatsiya va refleksiya: isbot doirasi aniqlanadi (1-rasm).



1-rasm. ODT kursida matematik isbotlashni tashkil etishning to‘rt bosqichli sikli.

Modelda o‘qituvchi javobni tayyor shaklda berish o‘rniga “Nima uchun?”, “Qaysi shart ishlatildi?”, “Shart olib tashlansa nima o‘zgaradi?” degan diagnostik savollar orqali talabaning mantiqiy qarorini ochib beradi. Bir xil tenglamaning yechimini topish, uning yagonaligini isbotlash va shart buzilganda kontrmisol keltirish turli bilim amallarini talab qiladi.

Shu sababli mashg‘ulotlar faqat hisoblash mashqlaridan tarkib topmasligi kerak.

Matematik mazmun va namunaviy isbot vazifalari

1-vazifa (yagonalikni isbotlash). kesmada funksiyalar uzluksiz bo‘lsin. , Koshi masalasining dagi ikkita yechimi mavjud deb faraz qilamiz. Ularning ayirmasi quyidagi bir jinsli masalani qanoatlantiradi:

(1)

Integrallovchi ko‘paytuvchi quyidagicha aniqlanadi: . U musbat va differensiallanuvchi bo‘lib, ko‘paytmani differensiallashdan kelib chiqadi. Shuning uchun . ekanidan , ya’ni . Bu natija boshlang‘ich shart va koeffitsiyentlarning uzluksizligiga tayanadi.

(2)

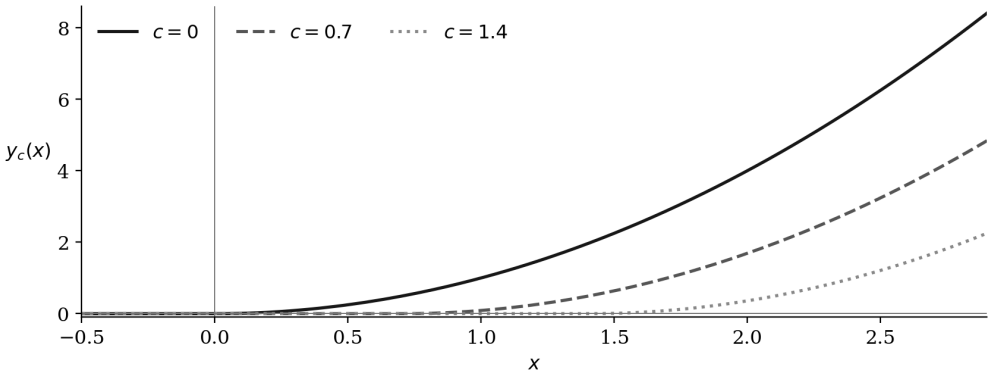
2-vazifa (qarshi misolning mantiqiy vazifasi). , masalasini qaraymiz. O‘ng tomon atrofida bo‘yicha lokal Lipschitz shartini qanoatlantirmaydi. Har bir uchun quyidagi funksiya masalaning yechimidir:

(3)

Haqiqatan, da hosila nolga teng; da ; da bir tomonlama hosilalar nolga teng. bo‘lganda . Demak, boshlang‘ich shartni bajaradigan turli yechimlar mavjud: yagonalik buziladi. Bunda Lipschitz sharti yagonalik uchun yetarli, ammo umumiy holda zarur shart emasligi ham muhokama qilinadi.

3-vazifa (hukmning qo‘llanish chegarasi). tenglamasi uchun funksiya bo‘yicha lokal Lipschitz shartini qanoatlantirsin. Agar ikkita yechim biror nuqtada bir xil qiymat qabul qilsa, lokal yagonalikdan boshlab ularning umumiy aniqlanish oralig‘ida ustma-ust tushishi kelib chiqadi. Talabalar ushbu hukmni isbotlashda qaysi shart qayerda ishlatilishini asoslaydilar.

Natijalar: nazariy-metodik loyihalashning birinchi natijasi - tekshiriladigan to‘rt bosqichli o‘quv sikli (1-rasm). Ikkinchi natija - ODT mazmuni bilan muvofiqlashtirilgan besh indikatorli rubrika. Uchinchi natija - yagonalik teoremasining isboti, Lipshits shartiga oid kontr misol va shartli hukmni tahlil qilish kabi uch xil didaktik topshiriq.



2-rasm. Koshi masalasining turli qiymatlardagi yechimlari.

1-jadval.

Isbotlash kompetensiyasini operatsion baholash rubrikasi

Indikator	0 ball	2 ball	4 ball
D1. Shart va ta’rif	Shartni ajratmaydi	Qisman to‘g‘ri	Barcha muhim shartlarni aniq ko‘rsatadi
D2. Strategiya	Yo‘l tanlanmagan	Yo‘l mos, asos to‘liq emas	Mos strategiyani asoslab tanlaydi
D3. Deduksiya	Mantiqiy uzilishlar	Asosiy zanjir bor, bo‘shliq mavjud	Barcha hal qiluvchi o‘tishlar asoslangan
D4. Validatsiya	Xatoni ilg‘amaydi	Ayrim xatolarni ko‘radi	Shart, soha va qarshi misolni tekshiradi
D5. Refleksiya	Xulosa yo‘q	Cheklovni qisman ko‘rsatadi	Isbotning chegarasi va tuzatishni tushuntiradi

Har bir indikator 0, 1, 2, 3 yoki 4 ball bilan baholanadi. Jadvalda 0, 2 va 4 ballga mos tayanch tavsiflar keltirilgan. 1 va 3 ball qo‘shni tavsiflar orasidagi natijalarga beriladi. Umumiy baho 0–20 oralig‘ida. Ushbu rubrikaning psixometrik xossalari hali tekshirilmagan.

(4)

Baholashning taklif etiladigan ketma-ketligi: mustaqil yozma isbot, shartni olib tashlash bo‘yicha qisqa savol, noto‘g‘ri dalilga ekspertiza, so‘ng reflektiv izoh. Har bir ishni ikkita baholovchi kodlaydi; kelishuv darajasi vazifalar kesimida baholanadi. Dastlabki sinovda rubrika tavsiflari ekspertlar muhokamasi asosida qayta ishlanishi kerak. Dastlabki natijalar e’lon qilinishidan oldin baholovchilar kelishuvi va shkalaning tuzilma validligi tekshirilishi lozim.

Muhokama. Taklif etilgan modelning asosiy didaktik g‘oyasi isbotni faqat tayyor matnni qayta aytish emas, matematik hukmni zarur shartlari bilan qabul qilish, dalilni qurish va tekshirish jarayoni sifatida tashkil qilish. Mazkur yondashuv Veber ajratgan strategik bilim muammosiga [2] hamda Selden yoritgan dalil validatsiyasidagi qiyinchiliklarga

[3] bevosita javob berishga urinadi. ODT kontekstida esa boshlang‘ich shart, yechim oralig‘i va regulyarlik farazlari talabaning deduktiv fikrini tahlil qilish uchun juda aniq matematik vosita bo‘lib xizmat qiladi.

Xulosa. Oddiy differensial tenglamalarni o‘qitishda matematik isbotlash kompetensiyasini rivojlantirish uchun “shartni talqin qilish strategiyani tanlash deduktiv konstruksiya —dalilni validatsiya qilish” sikliga asoslangan metodik model ishlab chiqildi. Model besh indikatorli rubrika va uch turdagi matematik topshiriq bilan operatsionlashtirildi. Birinchi tartibli chiziqli Koshi masalasining yagonaligi, lokal Lipshits sharti buzilgan holatdagi ko‘p yechimlilik va yechimlarning kesishmasligi haqidagi shartli hukm misollarida modelning mantiqiy mazmuni aniq ko‘rsatildi.

Tadqiqotning nazariy ahamiyati isbot matnining to‘g‘riligini tekshirish, shartlarning rolini anglash va qarshi misol qurish jarayonlarini ODT kursining yagona kompetensiyaviy tuzilmasida bog‘lashdan iborat. Amaliy ahamiyati esa o‘qituvchi uchun dars ssenariysi, talaba uchun topshiriqlar turi va tadqiqotchi uchun baholash mezonlari taklif etilganidadir.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

[1] Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: a systematic review. ZDM – Mathematics Education, 56, 47–59. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y

[2] Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48, 101–119. https://doi.org/10.1023/A:1015535614355

[3] Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? Journal for Research in Mathematics Education, 34(1), 4–36. https://doi.org/10.2307/30034698

[4] Rasmussen, C. L. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students’ understandings and difficulties. The Journal of Mathematical Behavior, 20(1), 55–87. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00062-1

[5] Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students’ proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education III (CBMS Issues in Mathematics Education, Vol. 7, pp. 234–283). American Mathematical Society.

[6] Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 38(3), 289–321.

[7] Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. Educational Studies in Mathematics, 66, 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

[8] Rasmussen, C., & King, K. D. (2000). Locating starting points in differential equations: A realistic mathematics education approach. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(2), 161–172. https://doi.org/10.1080/002073900287219

[9] Rasmussen, C., & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 26(3), 189–194.

[10] Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. Qualitative Research in Psychology, 3(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa