

KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI O'QITISHDA MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA VIZUALLASHTIRISH USULLARIDAN FOYDALANISH

Sh.Ramazonova¹

1. Osiyo Xalqaro universiteti, stajyor-o'qituvchi

Mas'ul muallif: Ramazonova Sh.Sh, Osiyo Xalqaro universiteti, stajyor-o'qituvchi.

Accepted: 13 Sentabr 2026

Published: 13 Sentabr 2026

Copyright: © 2026 by the author(s). Licensee Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi.

Iqtibos uchun: Ramazonova, S. KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI O'QITISHDA MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA VIZUALLASHTIRISH USULLARIDAN FOYDALANISH / S. Ramazonova // Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi. — 2026. — T. 9, № 1. — B. 200–203.

Annotatsiya. Zamonaviy oliy ta'lim tizimida murakkab matematik tushunchalarni talabalarga mazmunan chuqur, mantiqan izchil va amaliy jihatdan tushunarli tarzda yetkazish muhim metodik vazifalardan biri hisoblanadi. Xususan, kasr tartibli differensial tenglamalar klassik differensial tenglamalarga nisbatan murakkab matematik tuzilishga ega bo'lib, ularni o'rganishda talabalardan abstrakt tafakkur, funksional bog'lanishlarni tahlil qilish, matematik model qurish va olingan natijalarni geometrik hamda fizik mazmunda talqin eta olish ko'nikmalari talab etiladi. Kasr tartibli hosila tushunchasining integral operatorlar bilan uzviy bog'liqligi, yechimlarning vaqt va fazoga nisbatan o'ziga xos xatti-harakati hamda xotira effektining mavjudligi mazkur mavzuni an'anaviy bayon qilish usullari bilangina samarali o'zlashtirishni qiyinlashtiradi. Shu sababli kasr tartibli differensial tenglamalarni o'qitishda matematik modellashirish, grafik tasvirlash, dinamik vizuallashtirish va kompyuter vositalaridan foydalanish alohida metodik ahamiyat kasb etadi.

Kalit so'zlar: kasr tartibli differensial tenglama, kasr tartibli hosila, matematik modellashirish, vizuallashtirish, Caputo hosilasi, Riman–Liuvill hosilasi, matematik model, grafik interpretatsiya, raqamli texnologiyalar, matematik tafakkur.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В современной системе высшего образования одной из важных методических задач является содержательно глубокое, логически последовательное и практически понятное изложение студентам сложных математических понятий. В частности, дробные дифференциальные уравнения имеют более сложную математическую структуру по сравнению с классическими дифференциальными уравнениями, и их изучение требует от студентов абстрактного мышления, умения анализировать функциональные зависимости, строить математические модели, а также интерпретировать полученные результаты с геометрической и физической точек зрения. Тесная связь понятия дробной производной с интегральными операторами, специфическое поведение решений во времени и пространстве, а также наличие эффекта памяти затрудняют эффективное освоение данной темы исключительно посредством традиционных методов изложения. В связи с этим использование математического моделирования, графического представления, динамической визуализации и компьютерных средств при обучении дробным дифференциальным уравнениям приобретает особое методическое значение.

Ключевые слова: дробное дифференциальное уравнение, дробная производная, математическое моделирование, визуализация, производная Капуто, производная Римана–Лиувилля, математическая модель, графическая интерпретация, цифровые технологии, математическое мышление.

USING MATHEMATICAL MODELING AND VISUALIZATION METHODS IN TEACHING FRACTIONAL-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. In the modern system of higher education, one of the important methodological tasks is to present complex mathematical concepts to students in a meaningful, logically consistent, and practically understandable way. In particular, fractional differential equations have a more complex mathematical structure compared with classical differential equations, and their study requires students to develop abstract thinking, analyze functional relationships, construct mathematical models, and interpret the obtained results from geometric and physical perspectives. The close relationship between the concept of a fractional derivative and integral operators, the specific behavior of solutions with respect to time and space, as well as the presence of the memory effect, make it difficult to master this topic effectively using only traditional methods of presentation. Therefore, the use of mathematical modeling, graphical representation, dynamic visualization, and computer-based tools in teaching fractional differential equations is of particular methodological importance.

Keywords: fractional differential equation, fractional derivative, mathematical modeling, visualization, Caputo derivative, Riemann–Liouville derivative, mathematical model, graphical interpretation, digital technologies, mathematical thinking.

Kirish. Kasr tartibli differensial tenglamalar zamonaviy matematikaning jadal rivojlanayotgan yo'nalishlaridan biri bo'lib, ularning nazariy va amaliy ahamiyati fizika, texnika, biologiya, iqtisodiyot, boshqaruv nazariyasi hamda turli jarayonlarni matematik modellashtirish masalalarida namoyon bo'lmoqda. Klassik differensial tenglamalarda hosilaning tartibi butun son bilan ifodalansa, kasr tartibli differensial tenglamalarda hosilaning tartibi ixtiyoriy haqiqiy yoki kompleks son qiymatini qabul qilishi mumkin. Bu esa klassik differensial hisob tushunchalarini yanada umumlashtirish imkonini beradi.

Kasr tartibli differensial tenglamalarni o'rganish jarayonida talabalar faqat yangi matematik formulalarni o'zlashtiribgina qolmay, balki klassik differensial hisob bilan kasr tartibli hisob o'rtasidagi bog'lanishni tushunishlari, kasr tartibli hosilaning matematik va amaliy mazmunini anglashlari hamda uning yordamida ifodalanuvchi jarayonlarni tahlil qila olishlari zarur. Shu sababli mazkur mavzuni o'qitishda faqat nazariy ta'rif va formulalarni bayon etish bilan cheklanib qolish yetarli emas. Talabalarda mazkur tushunchalar haqida yaxlit tasavvur hosil qilish uchun matematik modellashtirish va vizuallashtirish usullaridan kompleks foydalanish muhim ahamiyatga ega.

Kasr tartibli analizda keng qo'llaniladigan tushunchalardan biri Riman–Liuvill kasr tartibli hosilasidir. bo'lgan holda ushbu hosila quyidagicha aniqlanadi:

bu yerda — hosilaning kasr tartibi, esa Gamma funksiyasini ifodalaydi.

Kasr tartibli differensial tenglamalarni amaliy masalalarda qo'llashda Caputo hosilasi ham alohida o'rin tutadi. Caputo bo'yicha kasr tartibli hosila

Mazkur ta'riflarni talabalarga faqat formulalar orqali tushuntirish ayrim hollarda mavzuning mazmunini to'liq anglash uchun yetarli bo'lmaydi. Chunki kasr tartibli hosilaning muhim xususiyatlaridan biri uning lokal bo'lmagan xarakterga ega ekanligidir. Klassik hosila funksiyaning muayyan nuqta atrofidagi o'zgarishini tavsiflasa, kasr tartibli hosilani hisoblashda funksiyaning oldingi qiymatlari ham ishtirok etadi. Shu jihatdan kasr tartibli operatorlar jarayonning oldingi holatlari uning keyingi rivojlanishiga ta'sir qiladigan matematik modellarni ifodalash imkoniyatiga ega.

Mazkur xususiyatni o'qitishda vizuallashtirish usuli katta metodik ahamiyat kasb etadi. Talabaga kasr tartibi α ning turli qiymatlarida yechimning grafiklari bir vaqtning o'zida ko'rsatilsa, klassik va kasr tartibli modellar orasidagi farqni bevosita kuzatish imkoniyati yuzaga keladi. Natijada kasr tartibining o'zgarishi yechimning rivojlanish tezligi, so'nish xarakteri va vaqtga bog'liq xususiyatlariga qanday ta'sir ko'rsatishi ancha tushunarli bo'ladi.

Kasr tartibli differensial tenglamalarni o'qitishda matematik modellashtirishning samarali imkoniyatlarini oddiy relaksatsiya jarayoni misolida ko'rsatish mumkin. Klassik relaksatsiya modeli

ko'rinishda beriladi.

Ushbu tenglamaning yechimi

ko'rinishga keladi.

Mazkur masalaning yechimi Mittag–Leffler funksiyasi yordamida

ko'rinishda ifodalanadi. Bu yerda

Mittag–Leffler funksiyasidir.

Mittag–Leffler funksiyasi kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasida eksponensial funksiya bajaradigan vazifani umumlashtiruvchi obyekt sifatida namoyon bo'ladi. $\alpha=1$ bo'lganda ushbu funksiya klassik eksponentaga aylanadi va model an'anaviy relaksatsiya jarayonini tavsiflaydi. Tartib birdan kichraytirilgan sari yechimning boshlang'ich davrdagi kamayishi tezlashadi, ammo katta vaqt oraliqlarida so'nish darajali qonuniyat bo'yicha sekinlashadi. Ana shu ikki xil xatti-harakatning bir yechimda mujassamlanishi talabalar uchun eng ko'p savol tug'diradigan jihat hisoblanadi, shu bilan birga u kasr tartibli modellarning asosiy afzalligini ham ochib beradi.

Metodik nuqtai nazardan mazkur holatni og'zaki bayon qilishdan ko'ra grafik solishtirish orqali ko'rsatish maqsadga muvofiqdir. O'qituvchi bir koordinata tekisligida tartibning bir nechta qiymatiga mos yechim egri chiziqlarini keltirib chiqarsa, talaba parametrning uzluksiz o'zgarishi bilan model xulq-atvorining qanday siljishini bevosita kuzatadi. Bunday tajriba abstrakt formulani ko'rgazmali obrazga aylantiradi va yodlashga asoslangan o'zlashtirish o'rniga mazmunni anglashga tayangan bilim shakllanishini ta'minlaydi.

Kasr tartibli operatorlarning lokal bo'lmagan tabiati bilan bog'liq xotira effektini tushuntirishda soddalashtirilgan analogiyalardan foydalanish yaxshi natija beradi. Masalan, materialning deformatsiyaga javobi, muhitda zarrachalarning anomal tarqalishi yoki iqtisodiy ko'rsatkichlarning oldingi davrlar ta'sirida shakllanishi kabi misollar integral yadroning vazifasini intuitiv darajada oydinlashtiradi. Talaba yadroning darajali kamayishini "o'tmish qiymatlarining vaznlari" tarzida idrok etsa, kasr tartibli hosilaning ta'rifini endi shakliy konstruksiya emas, balki mazmunli matematik vosita sifatida qabul qilinadi.

Mavzuni o'qitishda matematik modellashtirish faoliyatini bosqichlarga ajratib tashkil etish tavsiya etiladi. Birinchi bosqichda real yoki nazariy jarayon tanlanib, uning muhim belgilari ajratiladi va soddalashtirish shartlari asoslanadi. Ikkinchi bosqichda jarayonga mos kasr tartibli tenglama tuzilib, boshlang'ich shartlar aniqlanadi hamda tartib parametrining ma'nosi izohlanadi. Uchinchi bosqichda yechim analitik yoki sonli usullar bilan topiladi. To'rtinchi bosqichda natija grafik ko'rinishda tasvirlanib, klassik model bilan qiyoslanadi. Beshinchi bosqichda esa olingan xulosalarning jarayonning haqiqiy xatti-harakatiga muvofiqligi baholanadi va model zarur hollarda takomillashtiriladi.

Bosqichli yondashuvning samaradorligini oshirish uchun tartib parametrining turli qiymatlarida yechim

xususiyatlari qanday o'zgarishini umumlashtirilgan holda taqdim etish foydalidir. Quyidagi jadvalda relaksatsiya modeli misolida kuzatiladigan asosiy tafovutlar va ularga mos metodik urg'u keltirilgan.

1-jadval.

Kasr tartibi qiymatlariga ko'ra yechim xususiyatlari va metodik urg'u

Tartib qiymati	Yechimning xatti-harakati	Metodik urg'u
$\alpha = 1$	Ekspontensial so'nish, xotira effekti kuzatilmaydi	Klassik model bilan taqqoslash uchun tayanch holat
$0,75 < \alpha < 1$	Boshlang'ich kamayish tezroq, so'ng sekin darajali so'nish	Xotira effektining ilk namoyon bo'lishini kuzatish
$0,25 < \alpha \leq 0,75$	Uzoq davom etadigan "dum", sekin barqarorlashish	Lokal bo'lmaganlik va integral yadro rolini izohlash
$\alpha \rightarrow 0$	Yechim boshlang'ich qiymatga yaqin holatda saqlanadi	Chegaraviy holatlarni tahlil qilish ko'nikmasi

Zamonaviy raqamli vositalar mazkur jarayonni sifat jihatidan yangi darajaga ko'taradi. Sonli hisoblash muhitlari yordamida talaba tartib parametrini o'zgartirib, natijani bir zumda grafik shaklda ko'rish imkoniyatiga ega bo'ladi. Interaktiv suriluvchi boshqaruv elementlari qo'shilgan modellar esa parametrga bog'liq o'zgarishlarni dinamik kuzatishga sharoit yaratadi. Bunday tajriba talabani passiv tinglovchidan faol tadqiqotchiga aylantiradi, chunki u gipoteza ilgari suradi, uni hisoblash yo'li bilan tekshiradi va natijani mustaqil izohlaydi.

Sonli usullardan foydalanishda kasr tartibli hosilaning integral tabiati alohida e'tibor talab qiladi. Klassik masalalarda qadamli usullar faqat oldingi bir necha nuqta qiymatiga tayangan holda ishlaganidan farqli ravishda, kasr tartibli tenglamalarni yechishda butun oldingi tarix hisobga olinadi. Shu sababli hisoblash hajmi va xatolik to'planishi masalasi o'quv jarayonida ham muhokama qilinishi lozim. Bu esa talabalarda hisoblash murakkabligini baholash, qadam kattaligini asosli tanlash va natijaning ishonchililigi tekshirish madaniyatini shakllantiradi.

Amaliy misollar tanlashda talabani mutaxassisligiga mos mazmun tanlangani samarali bo'ladi. Viskoelastik materiallarning kuchlanish-deformatsiya bog'lanishi, g'ovak muhitda issiqlik va massa uzatilishi, elektrokimyoviy jarayonlardagi impedans xarakteristikalar, epidemiologik va demografik jarayonlarning inersiyasi hamda moliyaviy qatorlardagi uzoq muddatli bog'lanish kabi masalalar kasr tartibli modellarning nafaqat matematik, balki amaliy zaruratini ham namoyish etadi. Real jarayonga tayangan misol talabani motivatsiyasini oshiradi va nazariy bilimni kasbiy faoliyat bilan bog'laydi.

Vizuallashtirishning didaktik imkoniyatlari faqat yechim grafiklari bilan cheklanmaydi. Gamma va Mittag-Leffler funksiyalarining xatti-harakatini tasvirlash, integral yadroning vaqt bo'yicha kamayish jadalligini ko'rsatish, fazaviy portretlar va parametrik oilalarni qurish, shuningdek analitik va sonli natijalarni bir grafikda qiyoslash ham katta ahamiyatga ega. Har bir tasvir muayyan metodik maqsadga xizmat qilishi, ya'ni aniq bir tushunchani yoki qonuniyatni ochib berishi kerak; aks holda ko'rgazmalilik ortiqcha ma'lumot yukiga aylanib qolish xavfi yuzaga keladi.

Baholash tizimini ham mazkur yondashuvga muvofiqlashtirish talab etiladi. Talabani bilimi faqat formulani keltirib chiqarish qobiliyati bilan emas, balki model tuzish mantiqi, parametr tanlashni asoslash, grafikni to'g'ri o'qish va natijaga izoh berish darajasi bo'yicha ham o'lchanishi lozim. Bunday mezonlar mustaqil ijodiy topshiriqlar, kichik guruhli loyihalar va hisoblash tajribalari asosida tuzilgan hisobotlar orqali samarali qo'llaniladi hamda talabalarning tahliliy va tadqiqotchilik ko'nikmalarini izchil rivojlantiradi.

Xulosa. Kasr tartibli differensial tenglamalarni o'qitishda matematik modellashtirish va vizuallashtirish usullaridan foydalanish murakkab matematik tushunchalarni talabalarga aniq, izchil va tushunarli tarzda yetkazish imkonini beradi. Matematik modellashtirish orqali nazariy tushunchalar real yoki nazariy jarayonlar bilan bog'lanadi, vizuallashtirish esa yechimlarning xatti-harakati, parametrlar ta'siri va kasr tartibli hosilaning o'ziga xos xususiyatlarini grafik ko'rinishda namoyon etishga xizmat qiladi.

Kasr tartibining turli qiymatlarida yechimlarni taqqoslash talabalarda funksional bog'lanishlarni tahlil qilish, matematik qonuniyatlarni aniqlash va mustaqil xulosa chiqarish ko'nikmalarini rivojlantiradi. Ayniqsa, klassik va kasr tartibli modellarni o'zaro solishtirish kasr tartibli differensial tenglamalarning mazmunini chuqurroq anglashga yordam beradi.

Shunday qilib, matematik modellashtirish va vizuallashtirish usullarini kasr tartibli differensial tenglamalarni o'qitish jarayoniga integratsiya qilish ta'limning ko'rgazmaliligi, amaliy yo'naltirilganligi va mazmuniy samaradorligini oshiradi. Mazkur yondashuv talabalarning matematik tafakkuri, tahliliy fikrlashi va mustaqil ishlash ko'nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi hamda murakkab matematik mavzularni o'zlashtirish samaradorligini oshirish uchun muhim metodik vosita sifatida qaralishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

- [1] Podlubny I. Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Academic Press, 1999.
- [2] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, 2006.
- [3] Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Springer, 2010.

- [4] Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. Imperial College Press, London, 2010.
- [5] Caputo M. Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent-II // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. – 1967. – Vol. 13, No. 5. – P. 529–539.
- [6] Metzler R., Klafter J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach // Physics Reports. – 2000. – Vol. 339, No. 1. – P. 1–77.
- [7] Garrappa R. Numerical Evaluation of Two and Three Parameter Mittag-Leffler Functions // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2015. – Vol. 53, No. 3. – P. 1350–1369.
- [8] Blum W., Galbraith P.L., Henn H.-W., Niss M. (Eds.). Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study. Springer, 2007.
- [9] Arcavi A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics // Educational Studies in Mathematics. – 2003. – Vol. 52, No. 3. – P. 215–241.

