ГЕОМЕТРИЯ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО И ПОПЫТКИ ДОКОЗАТЕЛЬСТВА V ПОСТУЛАТА ЕВКЛИДА

G'.T.Omonov[1], E.E.Jumayev[2], B.P.Amaniyazova[3]

1. Termez State Pedagogical Institute (Uzbekistan) soiskatel
2. Termez State Pedagogical Institute (Uzbekistan) kand. pedl. nauk, dotsent I
3. 2nd year undergraduate student of the Department of Mathematics, Termez State Pedagogical Institute (Uzbekistan) UDC: 51.371. N.I.

Mas'ul muallif: Omonov G'olibjon Tolibovich, Termez State Pedagogical Institute (Uzbekistan) soiskatel.

Received: 25 Oktabr 2026
Accepted: 30 Oktabr 2026
Published: 04 Noyabr 2026

Copyright: © 2026 by the author(s). Licensee Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi.

Iqtibos uchun: Omonov, G. T. ГЕОМЕТРИЯ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО И ПОПЫТКИ ДОКОЗАТЕЛЬСТВА V ПОСТУЛАТА ЕВКЛИДА / G. T. Omonov, E. E. Jumayev, B. P. Amaniyazova // Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi. — 2026. — Т. 11, № 1. — В. 8–12.

Аннотация. в работе рассматривается специфика геометрия Н. И. Ловачевского и попытки доказательства v постулата Евклида, никто не сомневался в истинности постулатов Евклида, что касается и V постулата, доказана что обе геометрии одинаково верны с логической точки зрения, и возникшие противоречия - результат различия двух различных геометрических систем. Ключевая слова: логика, геометрия, время, лет, момент, появления, труд, 13 книг, арифметика, изложения, понятия, определения, точка, часть, линия, ширина, граница, постулат, аксиома, утверждения, доказательства, прямая линия, радиус, пересечения, односторонная, внутренная, сумма, меньше, сторона.

LOBACHEVSKY'S GEOMETRY AND ATTEMPTS TO PROVE EUCLID'S FIFTH POSTULATE

Abstract. This paper examines the specific nature of N. I. Lobachevsky's geometry and the attempts to prove Euclid's fifth postulate. While it was once assumed that all of Euclid's postulates-including the fifth-were inherently true, it has since been demonstrated that both geometries are equally valid from a logical standpoint; the apparent contradictions that arise are simply the result of differences between two distinct geometric systems.

Keywords: logic, geometry, time, years, moment, emergence, labor, 13 books, arithmetic, exposition, concepts, definitions, point, part, line, width, boundary, postulate, axiom, statements, proofs, straight line, radius, intersections, one-sided, internal, sum, less than, side.

Постулаты Евклида. Евклид - автор первого дошедшего до нас строгого логического построения геометрии. В нем изложение настолько безупречно для своего времени, что в течение двух тысяч лет с момента появления его труда «Начал» оно было единственным руководством для изучающих геометрию.

«Начала» состоят из 13 книг, посвященных геометрии и арифметике в геометрическом изложении. Каждая книга «Начал» начинается определением понятий, которые встречаются впервые. Так, например, первой книге предпосланы 23 определения. В частности, Определение 1. Точка есть то, что не имеет частей. Определение 2. Линия есть длины без ширины Определение 3. Границы линии суть точки.

Вслед за определениями Евклид приводит постулаты и аксиомы, то есть утверждения, принимаемые без доказательства.

Постулаты. I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию. II . И чтобы каждую прямую можно было неопределенно продолжить. III. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом. IV. И чтобы все прямые углы были равны. V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними односторонние внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиомы. I. Равные порознь третьему равны между собой. II. И если к ним прибавим равные, то получим равные. III. И если от равных отнимем равные, то получим равные. IV. И если к неравным прибавим равные, то получим неравные. V. И если удвоим равные, то получим равные. VI. И половины равных равны между собой. VII. И совмещающиеся равны. VIII. И целое больше части. IX. И две прямые не могут заключать пространства.

Иногда IV и V постулаты относят к числу аксиом. Поэтому пятый постулат иногда называют XI аксиомой. По какому принципу одни утверждения относятся к постулатам, а другие к аксиомам, неизвестно.

Никто не сомневался в истинности постулатов Евклида, что касается и V постулата. Между тем уже с древности именно постулат о параллельных привлек к себе особое внимание ряда геометров, считавших неестественным помещение его

среди постулатов. Вероятно, это было связано с относительно меньшей очевидностью и наглядностью V постулата: в неявном виде он предполагает достижимость любых, как угодно далеких частей плоскости, выражая свойство, которое обнаруживается только при бесконечном продолжении прямых.

Попытки доказательства V постулата Евклида. До начала XIX столетия не возникало сомнений в незыблемости геометрии Евклида и невозможности логического обоснования и построения другой геометрии, отличной от евклидовой. Но это «невозможное" сделал великий русский ученый, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792-1856). Он открыл новую геометрию, которая оказалась также логически безупречной и верной, как и геометрия Евклида.

Однако не следует думать, что если созданная Лобачевским геометрия является новой, то она во всем отличается от евклидовой геометрии. Это далеко не так.

Начальные сведения геометрии Евклида и геометрии Лобачевского во многом, естественно, совпадают. Для них одинаковы определения и аксиомы (исключая аксиому параллельности прямых), а также ряд теорем об углах и о треугольниках. Отличаться начинают эти геометрии одна от другой лишь тогда, когда неизбежным становится применение той или иной аксиомы параллельности. Дело в том, что аксиома параллельности Лобачевского радикально отличается от аксиомы параллельности Евклида.

Вот эти аксиомы в современной формулировке.

Аксиома параллельности Евклида. На плоскости, через точку, взятую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, которая не пересекает данную (т.е. параллельна ей).

Аксиома параллельности Лобачевского. На плоскости, через точку, взятую вне данной прямой, можно провести по крайней мере две прямые, которые не пересекают данную (т.е. параллельны ей).

Совокупность предложений геометрии, доказательства которых не опираются на аксиому параллельности прямых или на предложения, уже ранее доказанные с ее помощью, принято называть абсолютной геометрией. При этом совокупность предложений геометрии, доказательства которых опираются на аксиому параллельности Евклида или на предложения, уже ранее доказанные с ее помощью, называют геометрией Евклида (собственно евклидовой геометрией), а совокупность предложений геометрии, доказательства которых опираются на аксиому параллельности Лобачевского или на предложения, уже ранее доказанные с ее помощью, - геометрией Лобачевского (неевклидовой геометрией). Из сказанного видно, что все предложения абсолютной геометрии справедливы как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского.

После «Начал» Евклида, в которых сформулирована аксиома параллельности (она появилась в «Началах» под названием «Пятый постулат»), прошло около 20 веков, в течение которых проблема пятого постулата волновала умы множества крупнейших математиков мира того времени.

Дело в том, что при анализе «Начал» обнаруживается, что V постулат Евклида существенно отличается от остальных сложностью формулировки. Этот постулат Евклидом сформулирован так: «Если, при пересечении двух прямых, расположенных в одной плоскости, третьей сумма внутренних односторонних углов не равна 2d, то эти прямые пересекаются и притом с той стороны, где эта сумма меньше 2d»(Символом d раньше обозначали величину прямого угла).

В то же время V постулат находит довольно позднее свое применение: «Начала» разбиваются как бы на две независимые части - абсолютная геометрия («геометрия без V постулата») и собственно евклидова геометрия («геометрия с V постулатом»). В этой связи, естественно, возникают вопросы: нужен ли V постулат? Нельзя ли логически вывести его из остальных постулатов и аксиом? Иначе говоря, не зависит ли V постулат от остальных постулатов и аксиом евклидовой геометрии?

Начавшиеся уже в эллинскую эпоху попытки вывести пятый постулат о параллельных прямых как логическое следствие из остальных постулатов и аксиом евклидовой геометрии неизменно продолжались в Средние и Новые века. Весь смысл задачи заключался в том, чтобы доказать этот постулат, не вводя вместо него никаких других допущений.

Трудно указать выдающегося математика, начиная с Птолемея (II в.) и кончая автором классического курса элементарной геометрии Лежандром (1752-1833), который не прилагал бы усилий к тому, чтобы, по выражению Лобачевского, «заделать брешь в теории параллельных». Прокл (410-485), например, писал о пятом постулате: «Это положение должно быть совершенно изъято из числа постулатов, потому что это - теорема, вызывающая много сомнений».

Ошибки ученых при доказательствах V постулата иногда заключались в погрешностях, которые допускали авторы, запутавшись в сложных построениях, чаще же всего в том, что вместо доказываемого постулата явно или косвенно вводился другой, равносильный ему постулат. Обычно эти доказательства проводились методом от противного: принимали положение, противное доказываемому, и старались путем логических рассуждений получить противоречие с уже установленными предложениями. Кроме того, авторы в ту пору еще недостаточно четко оперировали с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами, «свободно» пользуясь которыми можно доказать все, что угодно.

Одним из ученых, работавших над проблемой пятого постулата, был профессор Оксфордского университета Джон Валлис (1636-1703). Он считал бесспорным следующее положение: «Для каждой фигуры всегда существует подобная ей фигура произвольной величины» - и в 1663г. на основании этой аксиомы изложил «доказательство» V постулата Евклида. На самом деле аксиома Валлиса о существовании подобных фигур

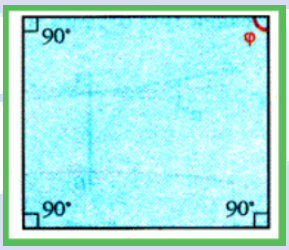
эквивалентна V постулату («забегая вперед», скажем, что в геометрии Лобачевского подобные треугольники не существуют).

Другим ученым, предвосхитившим неевклидову геометрию, был итальянский математик Джироламо Саккери (1667-1733), преподававший грамматику в иезуитской коллегии в Милане. Здесь, под влиянием Джованни Чевы (Джованни Чева (1648-1734)- итальянский инженер-гидравлик и экономист), Саккери заинтересовался математикой и стал серьезно заниматься ею. Впоследствии он преподавал математику в университете города Павши. На последнем году своей жизни в 1733г. Саккери опубликовал (на латинском языке) книгу под названием «Евклид, очищенный от всех пятен». В ней Саккери поставил перед собой задачу исправить все недостатки (“пятна”) “Начал” Евклида, в первую очередь, доказать V постулат. Он решительнее и дальше всех своих предшественников сделал попытку доказать этот постулат от противного. Однако он не сумел до конца пройти намеченный им путь. (Лобачевский, идя по этому пути, сумел открыть неевклидову геометрию.)

Итальянец Саккери рассматривал четырехугольник с тремя прямыми углами (рис. 3). Четвертый угол (обозначим его через φ) мог оказаться прямым, тупым или острым. Саккери установил, что гипотеза прямого угла, т.е. утверждение о том, что четвертый угол φ всегда равен 90°, позволяет доказать пятый постулат. Иначе говоря, гипотеза прямого угла представляет собой новую аксиому, эквивалентную пятому постулату.

Гипотезу тупого угла, допускающую существование четырехугольника, у которого четвертый угол φ тупой, Саккери отверг при помощи строгого рассуждения. Однако доказать, что и гипотеза острого угла неверна, ни сам Саккери, ни его последователи не смогли. Неприступная "крепость" пятого постулата осталась непокоренной.

Саккери независимым способом доказывает, что сумма углов треугольника не может быть более 180°; если принять постулат о параллельных линиях, то эта сумма равна 180°; если его опровергнуть, то она должна быть меньше 180°. Исходя из допущения, что сумма углов треугольника меньше 180° («гипотеза острого угла»), Саккери доказывает, что две непересекающиеся прямые, расположенные в одной плоскости, либо бесконечно удаляются друг от друга в одну сторону и неограниченно сближаются в другую сторону, либо имеют общий перпендикуляр, от которого они расходятся, бесконечно удаляясь друг от друга в обе стороны. Он доказывает, что (при гипотезе острого угла) перпендикуляр к одной стороне острого угла сначала пересекает вторую сторону, а потом, по мере удаления от вершины, перестает ее пересекать; что при этом существует предельный - первый непересекающий перпендикуляр. Саккери заявляет: «Гипотеза острого угла совершенно ложна, ибо противоречит природе прямой линии». Это заявление Саккери свидетельствует о его некомпетентности в обращении с бесконечно удаленными точками. И тем не менее он заканчивает: «На этом я мог бы спокойно остановиться; но я не хочу отказаться от попытки доказать, что эта упорная гипотеза острого угла, которую я вырвал уже с корнем, противоречит самой себе...» Далее следуют выводы, совпадающие с первыми предложениями геометрии Лобачевского.



Заслуга Саккери состоит в том, что он первый со всей определенностью связал учение о параллельных линиях с вопросом о сумме углов треугольника: три гипотезы, которые при этом возникают, действительно ведут к трем возможным геометрическим системам, трем различным геометриям: геометрии Евклида, геометрии Лобачевского, геометрии Римана.

Бернхард Риман (1826-1866) - великий немецкий математик, последователь Лобачевского, в своей лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», прочитанной в 1854г. в Геттингенском университете, включил в число аксиом предложение: «каждая прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой, пересекает эту прямую», откуда следует, что в геометрии Римана вообще не существует параллельных прямых. Эта аксиома выполняется, например, в геометрии на сфере, где сумма углов сферического треугольника больше 1800. Заметим, что лекцию высоко оценил присутствовавший на ней Карл Гаусс, однако она осталась незамеченной в математическом мире. Только после смерти Б.Римана текст лекции был обнаружен в его бумагах Р.Дедекиндом, опубликован в 1868г. и произвел огромное впечатление на ученых-математиков всего мира.

К числу предшественников Лобачевского следует отнести и члена Берлинской Академии наук - астронома, математика и философа Иоганна Генриха Ламберта (1728-1777), родившегося в Эльзасе, в г.Мюльгаузене, который состоял в Швейцарском союзе. В середине 60-х гг. Ламберт занимался теорией параллельности и в середине XVIII в. опубликовал сочинение «Теория параллельных линий», в котором содержатся такие же выводы, как и у Саккери. Он даже делает заключение о том, что гипотеза острого угла имеет место «на какой-то мнимой сфере». (Это замечательное предвидение оправдалось примерно через сто лет.)

В заключение своих исследований в теории параллельных Ламберт приходит к твердому выводу о том, что все попытки доказать V постулат Евклида ни к чему не приведут.

XIX в. начинается замечательными интересными исследованиями французского математика Андриена Мари Лежандра (1752-1833) по теории параллельных линий, выпустившего в свет «Начала геометрии», а затем обширную статью, помещенную в «Мемуарах Парижской академии», где он показывает, что теорема о сумме внутренних углов прямоугольного треугольника эквивалентна V постулату.

Его книга, посвященная евклидовой геометрии, хорошо написана и выдержала несколько изданий. Почти в каждом из них Лежандр приводил рассуждение, в котором, по его мнению, доказывался пятый постулат. Но неизменно в следующем издании автор, признавая, что в его рассуждении использовалось некое утверждение (не сформулированное им явно) - "очевидное", но в действительности представлявшее собой новую аксиому, эквивалентную пятому постулату. Ни одна из попыток Лежандра не привела к успеху.

Вот краткое описание одной из попыток Лежандра. Пусть a и b - две прямые, перпендикулярны одной и той же третьей прямой и пересекающие ее в точках A и B. Эти две прямые a и в не пересекаются. Допустим, что пятый постулат Евклида не верен и через A можно провести еще одну прямую a', так же непересекающую b. Рассматривая два получающихся острых угла a' и a" (симметричных друг другу), Лежандр строго доказывает, что прямая a как при продолжении ее вправо, так и продолжение ее влево все более удаляется от прямой в. Но прямые a и в не могут вести себя подобным образом: если они не прикасаются, то должны находиться на ограниченном расстоянии друг от друга на всем своем протяжении. Не правда ли, убедительно? Однако на самом деле это просто другая аксиома: она следует из пятого постулата Евклида, и, в свою очередь, из нее вытекает справедливость пятого постулата.

К предшественникам Лобачевского относятся также немецкий юрист и математик профессор Харьковского университета Ф.К. Швейкарт (1780-1857) и его племянник Ф.А.Тауринус (1794-1874). Швейкарт независимо от других пришел к убеждению, что кроме евклидовой геометрии может существовать еще и другая, которую он называет «астральной» геометрией и в которой сумма углов треугольника менее двух прямых углов, но своих выводов он не опубликовал.

К.Ф. ГАУСС. Гаусс обратился к теории параллельных в 1792 г. Сначала он надеялся доказать пятый постулат, но затем пришел к мысли о построении новой геометрии, которую назвал неевклидовой. В 1817 г. в одном из писем признался: "Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана". Но обнародовать эти идеи он не решился из боязни быть непонятым. Гаусс не опубликовал ни один из своих результатов, хотя из его писем и личных бумаг видно, что он разработал основные положения неевклидовой геометрии. После смерти Гаусса в его бумагах были найдены наброски отдельных наиболее простых теорем гиперболической геометрии.

БОЛЬЯИ. Творцом новой геометрии стал так же и венгерский математик Янош Больяй (1802 - 1860). В отличие от Гаусса он стремился распространить свои идеи, но большинство математиков тогда еще не были готовы их воспринять.

Результаты Яноша Больяя были сжато изложены в 1832 г. в приложении книге его отца, Фаркаша Больяя. Труд Я. Больяя "Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может)" обычно кратко называют "Аппендикс" (от лат. приложение).

В этой работе, составившей приложение к математическому трактату его отца Фаркаша Бояи, Янош Бояи изложил ту же теорию, что и Лобачевский, но в значительно менее развитой форме. Прочитав это сочинение, Гаусс написал своему ученику, математику Герлишу: "Я считаю молодого геометра фон Больяи гением первой величины". Однако в письме к Ф. Больяю он отозвался о сочинении Яноша гораздо сдержаннее: "Теперь кое-что о работе твоего сына. Если я начну с того, что эту работу не должен хвалить, то ты конечно, на мгновение поразишься, но иначе я не могу; хвалить ее значило бы хвалить самого себя: все содержание сочинения, путь, по которому твой сын прошел, и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими собственными достижениями, которые частично имеют давность 30-35 лет". Не найдя поддержки у современников, Я. Больяй перестал заниматься математикой. Он умер в состоянии глубокой депрессии за несколько лет до того, как неевклидова геометрия получила всеобщее признание.

В начале XIX в. в "сражение" с пятым постулатом вступил русский математик, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский. Он был исключительно талантлив и чрезвычайно настойчив. Он писал, что задача о параллельных прямых представляет собой "трудность, до сих пор непобедимую, но между тем заключающую в себе истины ощутительные, вне всякого сомнения, и столь важные для целей науки, что никак не могут быть обойдены".

Два тысячелетия бесплодных попыток доказать пятый постулат привели Н.И. Лобачевского к мысли о том, что этот постулат не зависит от других аксиом евклидовой геометрии, и поэтому его доказать нельзя.

Лобачевский обратился к методу доказательства от противного, допустив, что V постулат неверен. Из этого допущения последовали предложения, противоречащие многим теоремам классической геометрии и нашим представлениям о пространстве, которые сложились на основе многовекового опыта. Огромная заслуга Лобачевского заключается в его понимании, что эти противоречия коренятся не в том, что V постулат есть следствие остальных геометрических аксиом, и не в том, что, отвергая его, мы впадаем в противоречие с этими аксиомами, а в том, что V постулат есть новое независимое допущение, не вытекающее из других постулатов и аксиом, и поэтому, не нарушая этих аксиом, мы можем его принять и можем его отвергнуть. Принимая его,

Евклид создал свою классическую геометрию; отвергая его, Лобачевский создал свою «воображаемую геометрию», столь же строгую, логически безупречную и непротиворечивую, как и геометрия Евклида. Обе геометрии одинаково верны с логической точки зрения, и возникшие противоречия - результат различия двух различных геометрических систем.

Список использованной литературы

[1] Зив Б.Г. Задачи по геометрии: Пособие для учащихся 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский. - М.: Просвещение, 2000.

[2] Петрова Е.С. Теория и методика обучения математике: Учеб.-метод. пособие для студ. мат. спец.: В 3 ч. Ч. 1. Общая методика. / Е.С. Петрова - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. - 84 с.

[3] Саакян С.М. Изучение темы «Многогранники» в курсе 10 класса. / С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов. // Математика в школе. - 2000. - № 2.

[4] Сверчевская И.А. Устные задачи по теме «Пирамида». / И.А. Сверчевская. // Математика в школе. - 2003. - № 7.

[5] Сверчевская И.А. Устные задачи по теме «Призма». / И.А. Сверчевская. // Математика в школе. - 2003. - № 6.

[6] Ходеева Т. Свойства многогранников. / Т. Ходеева. // Математика. - 2002. - № 11.

[7] Erkin Jumayev va boshq. Мактабгача ва мактаб таълими журнали DIFFERENSIAL PAYDO BO‘LGUNGA QADAR GEOMETRIYA NIMA BILAN SHUG‘ULLANGAN. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.14926297

[8] Erkin Jumayev va boshq. Мактабгача ва мактаб таълими журнали Umumta’lim maktablari matematika to‘garagida sferaning elementlarini o‘rganish metodikasi DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.22211855

[9] Э. Э. Жумаев Качественные вопросы геометрии треугольника Мактабгача ва мактаб таълими журнали DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.14926444

[10] Эркин Эргашевич Жумаев INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE MODERN, INNOVATIVE DEVELOPMENT OF EXACT AND NATURAL SCIENCES IN HIGHER EDUCATION NOVEMBER 15, 2024 ПАРАЛИЗУЮЩИЙ СТРАХ ПЕРЕД БИССЕКТРИСОЙ УГЛА И БИССЕКТРИСОЙ ТРЕУГОЛЬНИКА https://doi.org/10.5281/zenodo.14168814

[11] Э.Э. Жумаев I INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE “MODERN EDUCATION AND PSYCHOLOGY FACING COMPLEX PROBLEMS: SYNERGETIC APPROACH PROBLEMS AFFECTING PERSONAL DEVELOPMENT”, APRIL 15, 2025 СУТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРИТЧ О ТВОРЕНИИ https://doi.org/10.5281/zenodo.15275878

[12] Nodira Isakova, Nurmakhan Abdukarimov, Erkin Zhumaev, Feruza Rashidova Bidirectional Bidirectional Rnns for Fake News Detection(SKOPUS)

[13] Rnns for Fake News Detection // AIP Conference proceedings, 2025, Vol. 3377 ttps://pubs.aip.org/aip/acp/article/3244/1/020045/3322730/ Forecasting-of-housing-construction-in-2024-2029

[14] Жумаев Э. Э и друг. Основные задачи развития образования, проектирование школы будущих поколений МИР ОБРАЗОВАНИЯ -ОБРАЗОВАНИЕ В МИРЕ № 2 (98) апрель - июнь Москва 2025 Моковский психолого-социальный университет Научно-методический журнал. стр.80-86. 80531 (http://www.ural-press.ru/catalog/rules)

[15] Жумаев Э. Э и друг. Этапы развития тригонометрии как науки МИР ОБРАЗОВАНИЯ -ОБРАЗОВАНИЕ В МИРЕ № 3 (99) апрель - июнь Москва 2025 Моковский психолого-социальный университет Научно-методический журнал стр. 86-93. 80531 (http://www.ural-press.ru/catalog/rules).