ÇIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YEÇIŞNING ITERATSION USULLARI: NAZARIYA, YAQINLAŞIŞ VA SONLI TAJRIBALAR

D.F.Hamroqulova[1]

1. "Osiyo xalqaro universiteti" "Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar" kafedrasi öqituvchisi

Mas'ul muallif: Hamroqulova Dildora Furqat Qizi, "Osiyo xalqaro universiteti" "Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar" kafedrasi öqituvchisi.

Received: 04 Noyabr 2026
Accepted: 09 Noyabr 2026
Published: 14 Noyabr 2026

Copyright: © 2026 by the author(s). Licensee Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi.

Iqtibos uchun: Hamroqulova, D. F. ÇIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YEÇIŞNING ITERATSION USULLARI: NAZARIYA, YAQINLAŞIŞ VA SONLI TAJRIBALAR / D. F. Hamroqulova // Buxoro xalqaro universiteti ilmiy axborotnomasi. — 2026. — T. 11, № 1. — B. 365–373.

Annotatsiya. Maqolada çiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yeçişning statsionar iteratsion usullari nazariy va amaliy jihatdan tadqiq qilinadi. Yakobi hamda Gauss–Zeydel algoritmlarining matritsaviy ifodalari, yaqinlaşiş mezonlari, spektral radius, diagonal ustunlik va qoldiq normasi tushunçalari izohlanadi. Ikki turli uç noma'lumli sistema uçun bir xil başlanğiç yaqinlaşiş va töxtatiş mezonida sonli tajribalar bajarilib, iteratsiyalar soni hamda qoldiq normasi taqqoslanadi. Olingan natijalar muayyan matritsalarda Gauss–Zeydel usuli tezroq yaqinlaşişini körsatadi, biroq bu holatni barça sistemalarga umumlaştiriş mumkin emas. Algoritmlarning parallel hisoblaş va siyrak matritsalar bilan işlaşdagi afzalliklari ham muhokama qilinadi. Kalit sözlar: çiziqli algebraik tenglamalar sistemasi, Yakobi usuli, Gauss–Zeydel usuli, iteratsion matritsa, spektral radius, diagonal ustunlik, qoldiq normasi, sonli tajriba.

Kalit so'zlar: çiziqli algebraik tenglamalar sistemasi, Yakobi usuli, Gauss–Zeydel usuli, iteratsion matritsa, spektral radius, diagonal ustunlik, qoldiq normasi, sonli tajriba.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: ТЕОРИЯ, СХОДИМОСТЬ И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Аннотация. В статье рассматриваются теоретические и практические аспекты стационарных итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Рассматриваются матричные представления алгоритмов Якоби и Гаусса–Зейделя, критерии сходимости, а также понятия спектрального радиуса, диагонального преобладания и нормы вектора невязки. Для двух различных систем линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными проведены численные эксперименты при одинаковых начальных приближениях и критериях остановки. Выполнен сравнительный анализ количества итераций и норм невязок. Полученные результаты показывают, что для рассматриваемых матриц метод Гаусса–Зейделя обеспечивает более быструю сходимость по сравнению с методом Якоби. Однако данный результат не может быть обобщён на все системы линейных алгебраических уравнений. Кроме того, обсуждаются преимущества рассматриваемых алгоритмов при параллельных вычислениях и работе с разреженными матрицами.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, метод Якоби, метод Гаусса–Зейделя, итерационная матрица, спектральный радиус, диагональное преобладание, норма невязки, численный эксперимент.

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS: THEORY, CONVERGENCE, AND NUMERICAL EXPERIMENTS

Abstract. This article investigates the theoretical and practical aspects of stationary iterative methods for solving systems of linear algebraic equations. The matrix representations of the Jacobi and Gauss–Seidel algorithms, convergence criteria, spectral radius, diagonal dominance, and residual norms are examined. Numerical experiments are conducted on two different systems of three linear equations using the same initial approximations and stopping criteria. The number of iterations and residual norms are compared to evaluate the convergence behavior of both methods. The obtained results demonstrate that the Gauss–Seidel method converges faster than the Jacobi method for the matrices considered. However, this observation cannot be generalized to all systems of linear algebraic equations. Furthermore, the advantages of these algorithms in parallel computing and their applicability to sparse matrix systems are discussed.

Keywords: system of linear algebraic equations, Jacobi method, Gauss–Seidel method, iteration matrix, spectral radius, diagonal dominance, residual norm, numerical experiment.

Kırış. Çiziqli algebraik tenglamalar sistemalari tabiiy fanlar, texnika, iqtisodiy modellaştiriş va ma'lumotlarni qayta işlaşda uçraydi. Masalan, issiqlik tarqalişi, elektr zanjiri, mexanik muvozanat yoki differensial tenglamalarning ayirmali sxemalari köpinça shaklidagi algebraik masalaga keltiriladi. Matritsa katta va siyrak bölganda, barcha

elementlarni saqlaş yoki töğridan töğri ajratiş amallari qimmatga tuşişi mumkin[1].

$$AXB=$$

Iteratsion yondaşuvda dastlabki taxmin ketma-ket yaxşilanadi. Amaliy hisoblaşda maqsad cheksiz iteratsiya emas, balki qoldiq yoki xatolikning belgilangan chegaraga tuşişidir. Mazkur işning maqsadi klassik Yakobi va Gauss–Zeydel algoritmlarini bir xil mezonlar asosida taqqoslaş, yaqinlaşişning matematik shartlarini izohlaş va takrorlanişi mumkin bölgan sonli misollarni keltirişdir.

Adabiyotlar tahlili. Saad [1] siyrak sistemalar uçun statsionar hamda Krylov qismfazosi usullarini tizimli yoritadi. Varga [2] iteratsion matritsalarning spektral xossalari va yaqinlaşiş nazariyasini bayon etadi. Bagnara [3] Yakobi va Gauss–Zeydel usullari uçun diagonal ustunlik bilan boğliq yaqinlaşiş natijalarini umumiy isbot doirasida muhokama qiladi. Young [4] katta çiziqli sistemalar, relaksatsiya usullari va hisoblaş algoritmlarini tadqiq etgan.

1. Matematik model va iteratsion sxema

bölsin. Çiziqli sistema körinişda beriladi. ajratişda diagonal, qat'iy quyi uçburçak va qat'iy yuqori uçburçak qismlarni bildiradi. Quyidagi ikki algoritm uçun deb faraz qilinadi.

$$A\in ¡^{n\times n},X\ BR\in$$

$$AXB=$$

$$AD=L+U+$$

$$D$$

$$L$$

$$U$$

$$a_{ii}\neq 0$$

Umumiy statsionar iteratsiya: . Agar aniq yeçim bölsa, xatolik vektori uçun va tengliklari örinli. Demak, ixtiyoriy başlanğiç vektordan yaqinlaşişning zarur va yetarli şarti bölişidir[2].

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$$

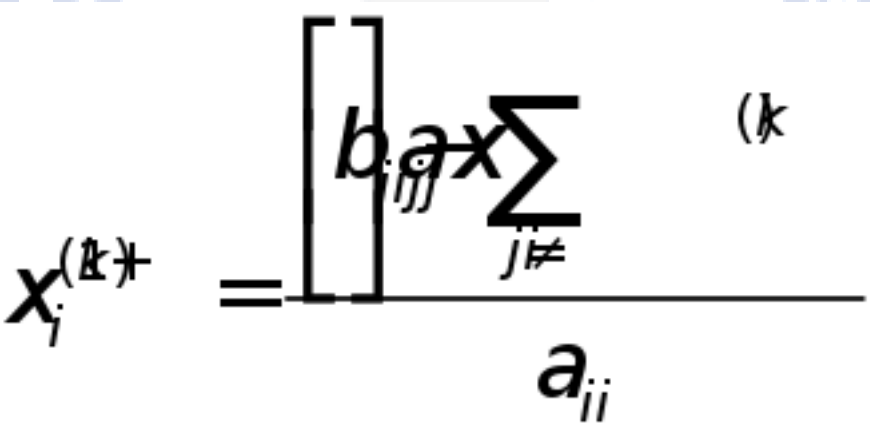
$$x^*$$

$$e^{(k)}=x^{(k)}-x^* \qquad *$$

1.1. Yakobi usuli

Har bir noma’lum yangi iteratsiyada faqat oldingi iteratsiyaning qiymatlariga tayangan holda hisoblanadi:

(1)



Matritsaviy shakli: ; . Bu yerda — keyingi iteratsiyadagi yeçim vektori; — oldingi iteratsiyadagi yeçim vektori; — koeffitsiyentlar matritsasining diagonal qismi; — quyi uçburçak matritsa (diagonalsiz); — yuqori uçburçak matritsa (diagonalsiz); — diagonal matritsaning teskari matritsasi; — ozod hadlar vektori; — Yakobi usulining iteratsion matritsasi. Bu algoritmda komponentlar mustaqil yangilangani sababli parallel hisoblaş imkoniyati yuqori, ammo har bir iteratsiyada oldingi vektorni saqlaş zarur.

$$L$$

$$U$$

$$D^{-1}$$

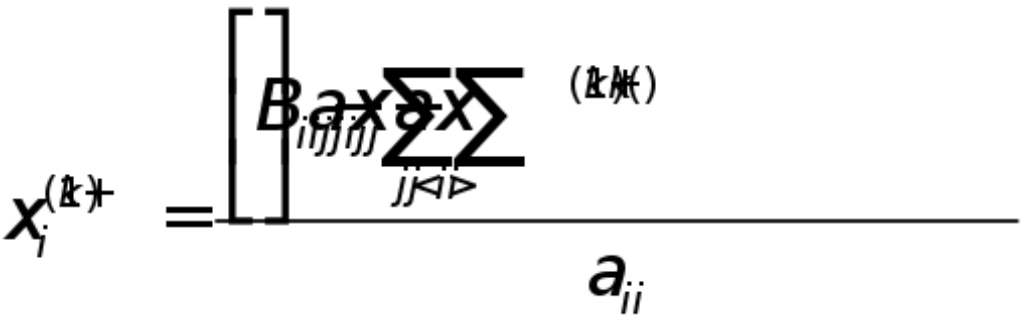
$$B$$

$$B_J$$

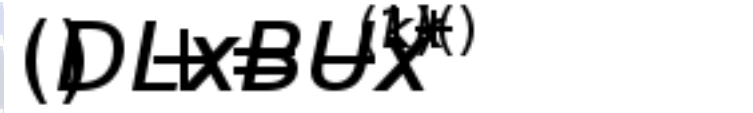
1.2. Gauss–Zeydel usuli

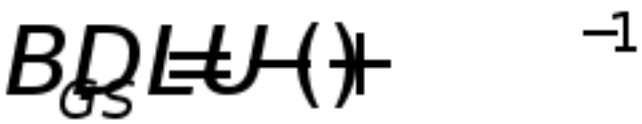
Gauss–Zeydel algoritmi joriy iteratsiyada hisoblangan yangi komponentlardan darhol foydalanadi:

(2)



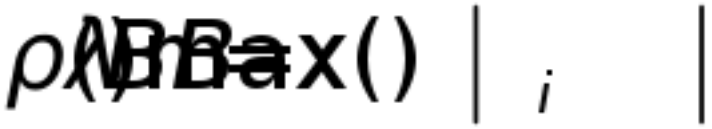
Matritsaviy shakli: ; . Yangi qiymatlar darhol işlatilgani uçun ayrim masalalarda yaqinlaşiş tezlaşadi. Biroq komponentlar ketma-ket boğliq bölib, oddiy shakldagi parallellaştirişni qiyinlaştiradi.





2. Yaqinlaşiş şartlari va töxtatiş mezonlari

Spektral radius sifatida aniqlanadi. Qat'iy satr diagonal ustunligi sharti har ikkala usulning yaqinlaşişini kafolatlaydi[2,3]. Bu yetarli, lekin zaruriy şart emas. Simmetrik musbat aniqlangan uçun Gauss–Zeydel yaqinlaşişi ham kafolatlanadi; Yakobi uçun esa faqat simmetrik musbat aniqlikning özi yetarli emas.



$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

$$A$$

Amalda qoldiq hisoblanadi. Ushbu maqolada töxtatiş şarti deb olindi; . Qoldiq kichikligi har doim xatolik ham aynan şunça kichikligini anglatmaydi: , şuning uçun . Bu boğlanış matritsaning şertlanganlik darajasini hisobga oliş zarurligini körsatadi.

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

$$\left\| r^{(k)} \right\|_\infty < 10^{-4}$$

$$\left\| r^{(k)} \right\|_\infty = \max_i \left| r_i^{(k)} \right|$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + r^{(k)}$$

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \leq \left\| A^{-1} \right\| \cdot \left\| r^{(k)} \right\|$$

3. Sonli tajribalar

3.1. Birinçi misol: uç diagonalli Sistema

Quyidagi sistema berilgan bölsin: $4x_1+x_2=6$. Uning aniq yeçimi . Başlanğiç vektor .

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$x^* = (1;2;1)$$

$$x^{(0)} = (0;0;0)$$

Yakobi formulalari: .

$$x_{123}^{(k+1)} = \frac{6 + 6x_{2}^{(k)}}{44}; \qquad \frac{0}{\qquad}; \qquad \frac{}{4}$$

Gauss–Zeydelda yangi qiymati topilgaç, ni hisoblaşda ni hisoblaşda esa işlatiladi. Birinçi Yakobi iteratsiyasi , birinçi Gauss–Zeydel iteratsiyasi natijani beradi.

$$x_1$$

$$x_2$$

$$x_{13}^{(k+1)},$$

$$x_2^{(k+1)}$$

$$(1,5;2,5;1)$$

$$(1,5;\ 2,125;\ 0,968)$$

Jadvaldagi belgilarning izohi. — iteratsiya tartib raqami: boşlanğiç yaqinlaşişni, birinçi, ikkinçi iteratsiyani bildiradi. Har bir navbatdagi iteratsiyada noma'lumlarning taqribiy qiymatlari qayta hisoblanadi. — -iteratsiyadagi qoldiq vektori. Bu yerda — koeffitsiyentlar matritsasi, — ozod hadlar vektori, — joriy taqribiy yeçim. — qoldiq vektorining çeksizlik normasi, ya'ni uning komponentlari mutlaq qiymatlarining eng kattasi. Ikki tik çiziq norma belgisini, esa çeksizlik normasini bildiradi; bu qoldiq çeksiz degani emas.

$$k$$

$$k=0$$

$$k=1$$

$$k=2$$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

$$k$$

$$A$$

$$B$$

$$x^{(k)}$$

$$\|r^{(k)}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |r_i^{(k)}|$$

$$\infty$$

Masalan, bölsa,. Qoldiq normasi kiçraygani sari taqribiy yeçim tenglamalar sistemasini kiçikroq qoldiq bilan qanoatlantiradi. Biroq qoldiq normasi bilan yeçim xatoligi bir xil tuşunça emas.

$$r^{(k)} = (0{,}002;\ 0{,}005;\ 0{,}00)^T$$

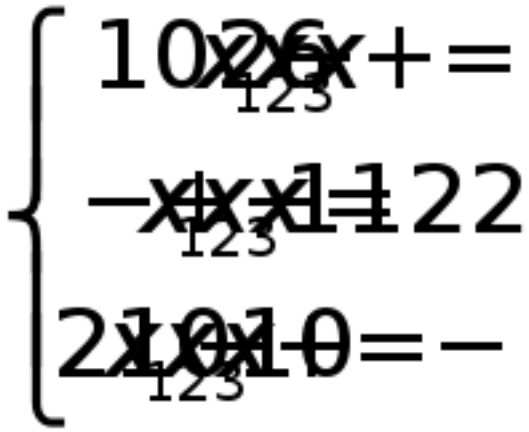
$$\|r^{(k)}\|_{max} = = (0{,}002;\ 0{,}005;\ 0{,}0)010{,}00$$

Iteratsiya k	$\|r\|_\infty$	$\|r\|_\infty$
1	3.00000000	2.12500000
2	1.25000000	0.10937500
3	0.37500000	0.01367188
4	0.15625000	0.00170898
5	0.04687500	0.00021362
6	0.01953125	0.00002670

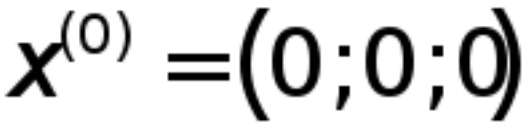
Birinçi misolda qoldiq mezoniga Yakobi 11-iteratsiyada, Gauss–Zeydel esa 6-iteratsiyada erişdi. Yakuniy qoldiq

normalari mos ravişda 0.00009155 va 0.00002670 ga teng.

3.2. Ikkinçi misol: boshqa koeffitsiyentli sistema



berilgan bölsin. Matritsa qat’iy diagonal ustun; boşlanğiç vektor yana . Aniq yeçim sonli hisobda quyidagiça: .





Yakobi uçun . Gauss–Zeydelda shu formulalarning joriy iteratsiyada topilgan qiymatlari ketma-ket qöllanadi.



Iteratsiya k	Yakobi ‖r‖∞	Gauss–Zeydel ‖r‖∞
1	4.00000000	3.88363636
2	0.83636364	0.11707769
3	0.21090909	0.00298472
4	0.05157025	0.00023892
5	0.01298512	0.00001263
6	0.00330194	—

Ikkinçi misolda Yakobi 9 iteratsiyada, Gauss–Zeydel 5 iteratsiyada belgilangan aniqlikka erişdi. Bu natijalar konkret sistema va töxtatiş mezoniga tegishlidir.

3.3. Natijalarni umumlaştiriş

Sistema	Yakobi: iteratsiya	Gauss–Zeydel: iteratsiya
1-misol	11	6
2-misol	9	5

Har ikkala tajribada Gauss–Zeydel kamroq iteratsiya talab qildi. Biroq bir iteratsiya narxi, hisoblaş vaqti, parallel arxitektura va matritsa tuzilişi ham umumiy samaradorlikka ta’sir qiladi. Şu sababli iteratsiyalar soni yagona baholaş mezoni böla olmaydi.

4. Amaliy qöllaniş va çeklovlar

Issiqlik ötkazuvçanligi yoki Puasson tenglamasini ayirmali usul bilan diskretlaştiriş natijasida siyrak algebraik sistemalar hosil böladi. Bunday masalalarda iteratsion algoritmlar matritsaning siyrak tuzilişini saqlagan holda işlaşga yordam beradi. Yakobi usuli parallel hisoblaş va silliqlaştiriş sifatida, Gauss–Zeydel esa ketma-ket yangilaşga mos jarayonlarda foydali bölişi mumkin[1].

Usullarning çeklovi şundan iboratki, diagonalda nol element mavjud bölsa, qayta tartiblaş yoki boşqa algoritm talab etilişi mumkin. Diagonal ustunlik yöq bölganda yaqinlaşiş alohida tekşiriladi. Bundan taşqari, yomon şertlangan matritsalarda qoldiq normasi va haqiqiy xatolik orasidagi farq sezilarli bölişi mumkin.

Xulosa. Maqolada Yakobi va Gauss–Zeydel usullari bir xil matematik model asosida tahlil qilindi. Ularning iteratsion matritsalari, spektral radiusga asoslangan yaqinlaşiş mezoni va diagonal ustunlik şarti yoritildi. Ikki mustaqil sonli misolda qoldiq normasining kamayişi taqqoslandi. Natijalar tanlangan sistemalarda Gauss–Zeydel usuli kamroq iteratsiya talab qilişini körsatdi. Kelgusida katta ölçamli siyrak sistemalarda vaqt, xotira sarfi, relaksatsiya va oldindan şertlaş usullarini ham soliştiriş maqsadga muvofiq.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

[1] Saad, Y. (2003). Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd ed. SIAM. https://doi.org/10.1137/1.9780898718003

[2] Varga, R. S. (2000). Matrix Iterative Analysis. 2nd ed. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-05156-2

[3] Bagnara, R. (1995). A Unified Proof for the Convergence of Jacobi and Gauss–Seidel Methods. SIAM Review, 37(1), 93–97. https://doi.org/10.1137/1037008

[4] Young, D. M. (1971). Iterative Solution of Large Linear Systems. Academic Press. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11733-3